

PRÓLOGO

1. COMPETICIONES Y OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS.

El significado original de la palabra *olimpiada* procede de la antigua ciudad griega Olimpia, situada en el Peloponeso, y se refiere al periodo de cuatro años contado desde la celebración de unos Juegos Olímpicos hasta la celebración de los siguientes, que era el modo como los antiguos griegos computaban el tiempo. En el año 776 a.C. tuvieron lugar los primeros Juegos Olímpicos, que duraron hasta el año 394 a.C. Hoy en día, en los Juegos Olímpicos modernos, esta palabra olimpiada se asocia también con la celebración regular cada cuatro años de estos eventos deportivos que empezaron en 1896, en Atenas. Durante el siglo XX se ha empleado también esta palabra para referirse a otras competiciones, tales como Olimpiada de Ajedrez. En el año 1934 en la antigua ciudad de Leningrado, hoy San Petersburgo, se acuñó el nombre de *Olimpiada Matemática* para una competición matemática organizada por el matemático soviético B. Delone. En 1935 se celebra en Moscú un concurso local de matemáticas que también se denominó Olimpiada Matemática. Sin embargo, la principal diferencia respecto de los Juegos Olímpicos es que en las olimpiadas de matemáticas clásicas sólo pueden participar estudiantes no universitarios, de edad normalmente inferior a veinte años. Actualmente la expresión Olimpiada Matemática es utilizada por muchas competiciones o concursos de matemáticas tanto nacionales como internacionales dirigidas a estudiantes no universitarios, principalmente. Este es el primer objetivo de la Federación Internacional de Competiciones Matemáticas (WFMC), que consiste en estimular el interés por las matemáticas a edad temprana, antes de realizar estudios universitarios. Este fin se logra de varias formas. En primer lugar porque las olimpiadas matemáticas son un instrumento poderoso para convencer a los jóvenes que las matemáticas son una ciencia viva y atractiva. En segundo lugar, es ampliamente conocido que este tipo de competiciones académicas son notablemente efectivas para identificar futuros matemáticos desde que son pequeños y, de este modo, poder prestarles ayuda para descubrir y desarrollar su talento. En tercer lugar, dentro de la enorme cantidad de olimpiadas matemáticas de cierta dificultad, se promueven importantes distinciones, lo que ayuda significativamente a la moral de los profesores y beneficia a la calidad del sistema educativo. Y en cuarto lugar, de forma sutil, las Olimpiadas Matemáticas proporcionan terrenos comunes entre los profesores de bachillerato y de universidad, estudiantes de matemáticas y matemáticos para compartir e intercambiar ideas de cómo enseñar esta asignatura de modo más eficaz.

Un ejemplo especial es el de Hungría, que ha tenido matemáticos de primera fila durante los últimos sesenta años y esta distinción se ha atribuido al largo y continuado papel que han supuesto las competiciones de matemáticas en su sistema educativo. La competición matemática Eötvös, que comenzó en 1894, ha jugado un papel importante en el desarrollo de las matemáticas en este país. Eminentes matemáticos como Féjer,

Haar, Riesz, Polya, Szegő y muchos otros, que después han sido internacionalmente conocidos, fueron ganadores de esta competición.

Desde estos comienzos, el movimiento de las olimpiadas matemáticas se ha desarrollado rápidamente en todo el mundo en las últimas tres décadas participando de los objetivos comunes de la WFMC.

Una Olimpiada matemática es por tanto, bien sea local, provincial, nacional o internacional, una forma de competición regular donde los jóvenes estudiantes utilizan su habilidad, ingenio y su pericia matemática para enfrentarse a la resolución de problemas desafiantes y atractivos de naturaleza matemática.

2. CLASE DE PROBLEMAS EN LAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS.

Normalmente se utiliza el término *no rutinario* para distinguir los problemas estilo olimpiadas de los ejercicios estándar de los libros de texto. Un problema de este tipo provoca un desafío apreciable; es decir requiere meditar, entender con claridad explorar,... y aunque no haga falta mucho conocimiento matemático si es necesario usar algo bastante distinto que la mera aplicación de técnicas memorizadas. Se requiere un punto de vista creativo, establecer conexiones que no se dan explícitamente, mirar lo conocido de forma nueva y sobre todo pensar con claridad e imaginación y con lógica persistente. Paul Halmos, afirma que *el corazón de las matemáticas son los problemas*. Desde el punto de vista de Halmos, que se hace eco del matemático George Polya, la labor de un profesor de matemáticas a cualquier nivel, es proporcionar a sus alumnos problemas relevantes y enseñarles como expresar sus soluciones de forma clara escrita y verbal.

3. PARTICIPACIÓN DE LA GENTE JOVEN EN LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS.

Existe una mezcla de diferentes motivos para participar en una olimpiada de matemáticas. Primeramente el propio desafío de cualquier concurso de medir las habilidades propias en una disciplina dada, con las de los otros concursantes. Si además se ha desarrollado una afición a las matemáticas, produce una alegría inmensa abordar y resolver problemas interesantes y con cierta estética. Pero hay otro motivo que impulsa a muchos jóvenes a entrenar y competir en este tipo de olimpiadas: los resultados obtenidos en las mismas y la destreza desarrollada, a menudo, se utilizan como méritos en pruebas de selección, en otorgar becas y en conseguir cursar estudios en ciertas áreas de matemáticas o de algunas especialidades técnicas. En los últimos años el número de solicitantes para determinadas universidades, ha crecido tanto que no sólo es necesario tener calificaciones buenas en el bachillerato y en las pruebas de acceso; se pide algo más, como tener estudios de Bachillerato Internacional, haber superado

exámenes especiales de admisión, entrevistas,..., para poder valorar el verdadero talento de los candidatos. Así ser seleccionado y participar en olimpiadas matemáticas de carácter internacional, nacional o incluso provincial es considerado como un valor añadido que podría ser más determinante incluso, que haber obtenido notas muy altas en los exámenes curriculares.

Por otra parte, es necesario observar que si el estudiante no se divierte cuando está en fase de entrenamiento, posiblemente le falte entusiasmo y le entre el desánimo cuando las pruebas sean realmente duras. No debe engañarse a este respecto.

Muchos estudiantes se apuntan a los programas de entrenamiento de olimpiadas matemáticas porque tienen las ganas y la euforia de descubrir sus dotes innatas, desarrollar su potencial hasta el límite y enfrentarse y superar desafíos matemáticos incluso dentro de un tiempo establecido. A veces las olimpiadas de matemáticas se describen como *la resolución de problemas bajo presión (de tiempo y psicológica)*. Bastantes han sentido el sabor tentador de *lo real*, como les gusta decir a los matemáticos, para distinguir lo aburrido y rutinario de hacer sumas. Lo real es la alegría de hacer matemáticas, de resolver problemas atractivos, de descubrir y probar teoremas, de explorar conexiones inesperadas en un mundo abstracto y puramente intelectual de gran belleza. Además, los jóvenes disfrutaban en estos certámenes de lo divertido de estar en grupo y de la oportunidad única de contactar con almas gemelas.

Ganar medallas no es todo porque los concursantes rivales pueden llegar a ser muy buenos amigos. *Es el juego y nuestro juego son las matemáticas.*

4. BENEFICIOS DE LOS ENTRENAMIENTOS Y DE LA PARTICIPACIÓN EN LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS.

Una respuesta directa y obvia es que para los estudiantes con talento matemático es el mejor modo de aprender esta disciplina. Otra respuesta válida es que presentan y desarrollan un amplio rango de destrezas de pensamiento y de razonamiento que tiene una gran variedad de aplicaciones.

La propia participación en los concursos de matemáticas ofrece el entrenamiento justo e idóneo que no requiere hacer grandes esfuerzos económicos y de tiempo de especialistas y de profesionales.

Aunque las competiciones de matemáticas se llevan a cabo para resolver problemas, el sistema de las Olimpiadas de Matemáticas y los cursos de entrenamiento asociados no sólo se refieren al aprendizaje de técnicas y resultados teóricos para resolver problemas de matemáticas. Estrictamente hablando es un *sistema de educación matemáticamente avanzada*. Para guiar y orientar a los estudiantes, que están interesados en matemáticas y tienen potencial, a que entren en el mundo de las olimpiadas de matemáticas, de tal forma que su habilidad matemática sea desarrollada eficaz y ampliamente, es importante mejorar esencialmente su manera de pensar matemáticamente y su habilidad

técnica para resolver problemas de matemáticas.

Un estudiante excelente debe tener la capacidad de pensar con flexibilidad y rigor. La habilidad para hacer razonamientos formales lógicos es una componente básica importante. Sin embargo, no es lo principal. Pensar de forma matemática incluye también otros aspectos claves, como empezar desde la intuición y entrar en lo esencial, mediante conjeturas, inducción, imaginación, construcción, diseño y habilidades creativas. Más aún, es necesario pasar de lo concreto a lo abstracto y viceversa.

El talento y la capacidad técnica para resolver problemas de matemáticas, además de computar y desarrollar de forma precisa cálculos y demostraciones y de usar adecuadamente métodos estándar, requiere ser no convencional, utilizando técnicas creativas, necesitando muchas veces construir herramientas adecuadas para abordar el problema y resolverlo.

Claramente los programas usuales de educación matemática no satisfacen los requisitos mencionados anteriormente, por lo que los libros de entrenamiento de olimpiadas matemáticas deben ser básicamente autocontenidos.

5. LA OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS (IMO).

La IMO en las dos últimas décadas, ha llegado a ser una institución internacional con impacto en gran parte de los países de todo el mundo, fomentando el talento de los jóvenes matemáticos y promoviendo un cierto acercamiento a matemáticas complejas, aunque básicas. Permanece en la base de un entendimiento abierto y no especializado de este antiguo arte.

En 1956, los países del este y la antigua unión soviética tomaron la iniciativa de organizar la IMO formalmente. La 1ª IMO se celebró en Brasov, Rumanía en 1959 y participaron siete países. Hoy en día, participan casi todos los países desarrollados y en vías de desarrollo. En julio de 2011, en Amsterdam, tuvo lugar la 52ª IMO donde han participado ciento un países.

Desde sus comienzos, las competiciones matemáticas tipo olimpiadas internacionales han establecido su propio estilo de problemas, que no requieren para su resolución un conocimiento muy amplio de matemáticas y por otra parte, son fáciles de enunciar. Sin embargo su resolución es difícil y se necesita imaginación, razonamiento y un grado alto de pensamiento original. El desarrollo y progreso tan rápido de las matemáticas discretas en las últimas décadas ha ejercido una notable influencia sobre el tipo de problemas que se proponen en la IMO. Actualmente los temas de los problemas de la IMO, dentro de la matemática elemental, incluyen teoría de números, polinomios, ecuaciones funcionales, desigualdades, teoría de grafos, números complejos, combinatoria, geometría y teoría de juegos.

En el llamado Salón de la Fama (Hall of Fame) de la IMO, que incluye numerosos matemáticos famosos, varias medallas Fields, premios Nevanlinna y otros con

importantes distinciones, se puede encontrar la lista de todos los participantes con sus resultados. La IMO ha adquirido su madurez total y su estatus a nivel mundial.

6. CARRERAS UNIVERSITARIAS APROPIADAS PARA ESTUDIANTES CON APTITUDES MATEMÁTICAS.

Ser profesor de bachillerato hubiera podido ser una labor muy gratificante para este tipo de personas. Actualmente y debido a la mezcla de intereses y objetivos de índole política, social, pedagógica y psicológica pasa a un segundo o tercer plano una enseñanza de las matemáticas real y efectiva donde también tengan cabida estudiantes con talento. Los mundos académicos de matemáticas y ciencias son una actividad profesional natural y vocacional. Más allá, la arquitectura, las ingenierías: aeronáutica, química, eléctrica, de telecomunicaciones, etc., son una salida profesional muy valorada. Más recientemente, la ciencia actuarial, la predicción del tiempo, la epidemiología, han llegado a ser importantes y sofisticadas disciplinas, que necesitan de matemáticos capaces de crear e implementar nuevos modelos para procesar la ingente cantidad de datos e información que conlleva estas profesiones. Por tanto, las dotes matemáticas son un punto a favor para investigar y desarrollar numerosos asuntos de importancia técnica e industrial, donde se combinan de manera fructífera la imaginación especulativa y el pensamiento riguroso. También en el mundo financiero existe un interés notable por los jóvenes con talento matemático, de tal forma que la matemática financiera se ha desarrollado rápidamente en los últimos años.

Esperamos que después del cuadro que hemos pintado de la Olimpiada Matemática, se haya despertado el interés tanto a los jóvenes por participar, como a los profesores para organizar sesiones o seminarios de entrenamiento.

7. UTILIDAD DE ESTE LIBRO PARA LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICAS

La matemática elemental suele ser muy atractiva e interesante para un gran número de estudiantes del actual grado de Ciencias Matemáticas. Estos alumnos son vocacionales y tienen afición a resolver tipos de problemas que sólo requieren el uso de conceptos básicos de matemáticas. Los que no han tenido la oportunidad de desarrollar sus destrezas en el bachillerato, se dan cuenta que el reto de estos problemas está a su alcance. Han aprendido a entender un teorema, una definición rigurosa, un contraejemplo... lo que les da *alas* para abordar problemas cuya resolución sólo depende de ellos; es decir, de su imaginación, creatividad y rigor. Por otra parte, los que ya han tenido la experiencia (normalmente en el bachillerato o en la secundaria) de enfrentarse con problemas de matemática elemental, poseen un valor añadido para entender o formular un concepto, o para valorar y seguir una demostración y encontrar pruebas alternativas. Este libro les permitiría conocer y ampliar su capacidad de vencer la dificultad objetiva que presenta un problema. Además, pensamos que estos problemas

aquí presentados fomentarían su creatividad matemática y su motivación, no sólo para este universo de la resolución de problemas, sino también para el estudio formal de la matemática.

8. ¿CÓMO PUEDE SERVIR ESTE LIBRO PARA ENTRENAR?

Adquirir la disposición mental y lograr la agilidad característica para resolver con éxito los problemas de un concurso no es fácil. Se necesitan unas buenas aptitudes básicas, un buen tutor o entrenador y buenas fuentes (¡como quizás este libro!). Esto llevará tiempo, esfuerzo, mucha paciencia y responsabilidad. De este modo se desarrollará gradual y cuidadosamente cada una de la amplia variedad de habilidades, y este repertorio de técnicas estará listo para utilizarse en el momento apropiado. Por tanto, un concursante de olimpiadas matemáticas debe tener su propia *caja de herramientas*, de ideas, técnicas y teoremas. Así en Geometría se supone el conocimiento de los teoremas de Ceva, Menelao, Ptolomeo (a veces su generalización como el teorema de Casey), no para que sea una aplicación directa de los mismos, sino para facilitar la resolución del problema. En Álgebra, las desigualdades aritmético-geométrica, la de Cauchy-Schwarz, la de reordenación,... pueden mover montañas con facilidad. En Teoría Elemental de Números, propiedades básicas de las congruencias como el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Gauss de reciprocidad cuadrática son necesarias para abordar un sinfín de problemas. Finalmente en Combinatoria, el principio de inclusión-exclusión, doble conteo mediante determinadas biyecciones, algunas funciones generatrices son muy útiles por la sencillez de los razonamientos y por el empleo de notación clara y compacta.

En este libro hemos recopilado suficientes problemas significativos y relevantes (algunos, incluso desafiantes), que están ordenados dentro de cada uno de los cuatro grandes apartados en que se divide el temario virtual de las olimpiadas: Álgebra, Geometría, Geometría y Combinatoria y Teoría de Números.

La mayor parte de estos problemas se han utilizado en la preparación y entrenamiento de los estudiantes que han formado parte del equipo que ha representado a España en la IMO desde 2003 a 2009. El método de trabajo con los estudiantes ha sido por correspondencia, mediante el correo electrónico. Normalmente se les enviaba grupos de tres problemas de distintos temas, como si se tratase de una de las dos sesiones de la prueba internacional, pero con la diferencia de que los problemas no estaban graduados por orden creciente de dificultad y tampoco tenían ninguna restricción de tiempo. De vez en cuando se les mandaban grupos más numerosos de problemas. Cuando iban contestando, se les hacían comentarios o correcciones o se les felicitaba por haber encontrado una solución completa y correcta. Después, si era oportuno, se les adjuntaba una solución, que a veces resultaba ser alternativa, para que la estudiaran y compararan con lo que habían hecho.

Muchos de estos problemas proceden principalmente de olimpiadas nacionales de distintos países, y también de las Listas Cortas de las diferentes olimpiadas internacionales e iberoamericanas, que son los problemas propuestos por los Comités de Selección de Problemas, pero no utilizados en la confección de la prueba de seis problemas que cada año se proponen tanto en la IMO como en la OIM (Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas).

Nuestro propósito principal es que el lector luche y forcejee con estos problemas y así desarrolle su método de resolución de problemas y su agilidad. Para este fin, se necesitan herramientas apropiadas, que se pueden encontrar en las páginas previas a los enunciados de cada apartado y en las propias soluciones. Sin embargo, la memorización de estos resultados y técnicas no son suficientes para resolver los problemas.

Por otra parte, aunque las soluciones figuran, sólo cuando se ha pensado largamente, se ha trabajado con tenacidad y se necesita una buena idea, se deberían consultar de manera puntual. Se debe seguir con la ayuda de esta nueva idea luchando con la solución hasta escribirla con todo detalle y rigor. O, al menos, se debe hacer algún progreso y dejar el problema para otro momento antes de leer la solución ofrecida de forma completa. Es posible que, sin la reconfortante proximidad de la solución, como una cuerda de seguridad, mientras se escala la roca, no se tenga el nervio de comenzar la escalada. Esta es la razón de porqué se presentan las soluciones. Pero lo que pretendemos es que cada uno escale la roca por sí mismo, sin ser izado pasivamente por la cuerda. Queremos que se tenga la experiencia de la enorme alegría de encontrar por uno mismo un camino que conduzca a la solución. A menudo hay bastantes vías para alcanzarla.

Las soluciones dadas no se pueden tomar como definitivas, como únicas o como las mejores. Sin embargo, confiamos en que sean buenas soluciones, en el sentido de que sirvan para germinar nuevas ideas y sean semillas para otros problemas. Esperamos además que sean un modelo para expresar las soluciones propias con claridad, elegancia y concisión utilizando bien las palabras y la notación. También hemos elaborado bastantes figuras explicativas, especialmente en los problemas geométricos, que pensamos que pueden ayudar al lector en el entendimiento de los problemas asociados a ellas.

Finalmente, en el último capítulo del libro, también se han propuesto, sin añadir ninguna propuesta de solución, varios problemas, de similar dificultad a los presentados anteriormente, para que el lector tenga la oportunidad de enfrentarse directamente a ellos.

George Polya determinó cuatro pasos en la resolución de problemas. Primero: entender el problema. Segundo: hacer un plan. Tercero: llevar a cabo ese plan. Y cuarto: mirar hacia atrás. Insistió que el paso más importante de esta lista es el último, que viene después de haber resuelto el problema. Es decir, mirar hacia atrás es reflexionar sobre la solución y pensar como se ha conseguido llegar a la misma. Además es

comprobar cada paso y revisar la teoría a la luz de esta aplicación. ¿Cuáles son los obstáculos en determinados momentos? ¿Cuál fue el avance significativo? ¿Cuáles han sido las ideas claves? ¿Qué dio las pistas para encontrar esas claves? ¿Hay otro modo de resolver el problema? ¿En qué difiere otra solución de ésta? ¿Qué método es más elegante? ¿Se usan todos los datos y las condiciones del enunciado? ¿Se puede simplificar o acortar la solución? ¿Puede ser usada esta solución como base para resolver otro problema relacionado? ¡Suerte y perseverancia en la resolución de problemas!

Los autores,
Alicante, Febrero de 2012