

AULA POLITÈCNICA  
/ TECNOLOGIA CIVIL

Juanjo Rivera Amores

# Anàlisi d'estructures

Teoria i problemes

# Anàlisi d'estructures

Teoria i problemes

AULA POLITÈCNICA  
/ TECNOLOGIA CIVIL

Juanjo Rivera Amores

# Anàlisi d'estructures

Teoria i problemes

Primera edició: octubre de 2005

Disseny de la coberta: Jordi Calvet

© Els autors, 2005

© Edicions UPC, 2005  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel.: 93 401 68 83 Fax: 93 401 58 85  
Edicions Virtuals: [www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)  
A/e: [edicions-upc@upc.edu](mailto:edicions-upc@upc.edu)

Producció: TECFOTO, SL  
Ciutat de Granada 55, 08005 Barcelona

Dipòsit legal: B-41407-2005  
ISBN: 84-8301-817-9

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

## Prefaci

El contingut d'aquest llibre correspon a una introducció a les estructures i als mètodes de càlcul que s'utilitzen per treballar-hi. Inclou material que habitualment rep el nom de *mecànica de materials* o, altrament, *resistència de materials*, i una introducció als mètodes de càlcul propiament dits. Es fa èmfasi en la resolució d'exemples, que, en alguns casos, s'ha realitzat de diverses maneres amb l'objectiu de comparar els diversos procediments de càlcul. Està estructurat en tres parts.

La primera correspon a l'estudi puntual de les deformacions i de les tensions, capítol 2, i s'hi estableixen els conceptes principals de l'elasticitat.

A la segona part, capítols del 3 al 9, es fa una anàlisi dels esforços a les seccions transversals de les barres i de les tensions i deformacions que aquests provoquen; s'estudien la tracció o compressió pura, la flexió, la tracció o compressió excèntrica, el cisallament i la torsió. L'estudi se centra en les barres rectilínies o amb poca curvatura inicial i no s'estudien les plaques ni els cossos tridimensionals. Aquest bloc acaba amb una introducció als conceptes energètics i als seus teoremes principals, en el capítol 9. El tercer bloc correspon a una revisió dels mètodes principals de càlcul en les estructures, capítol 10, i a la resolució d'una sèrie representativa d'exemples, capítol 11, fent èmfasi especialment en el mètode matricial, que és la base dels mètodes moderns de càlcul d'estructures complexes per elements finits. Per acabar, es fa una breu introducció al vinclament, que per la seva complexitat gairebé requeriria un volum a part.

L'autor agraeix al prof. Lluís Gil del Dept. de Resistència de Materials de la UPC, la seva aportació en la revisió tècnica del llibre. També al Servei d'Edicions de la UPC per l'acurada revisió terminològica i sintàctica, la qual ha contribuït a millorar notablement el contingut del present llibre.

Manresa, 3 d'octubre de 2005

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Deformació i tensió en un punt</b>	<b>13</b>
2.1	Deformació en un punt . . . . .	13
2.2	Interpretació geomètrica del tensor de deformacions . . . . .	15
2.3	Equacions de compatibilitat . . . . .	20
2.4	Tensió en un punt . . . . .	21
2.5	Tensions principals . . . . .	27
2.6	Equacions d'equilibri puntuals . . . . .	28
2.7	Equacions constitutives puntuals . . . . .	29
2.8	Cilindres i esferes de paret prima . . . . .	31
2.9	Exemples . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Estudi de les barres</b>	<b>37</b>
3.1	Equacions d'equilibri de les seccions . . . . .	38
3.2	Exemples . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Tracció i compressió pura</b>	<b>43</b>
4.1	Efecte de la temperatura . . . . .	48
4.2	Elements formats de materials diferents . . . . .	48
4.3	Exemples . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Flexió pura</b>	<b>53</b>
5.1	Flexió recta . . . . .	53
5.2	Flexió desviada . . . . .	58
5.3	Equacions d'equilibri en la flexió amb presència o no de tallant . . . . .	61
5.4	Flexió de barres corbes . . . . .	63
5.5	Exemples . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Tracció i compressió excèntrica</b>	<b>69</b>
6.1	Deformacions i tensions . . . . .	69
6.2	Nucli central . . . . .	70
6.3	Exemples . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Cisallament</b>	<b>73</b>
7.1	Càlcul de les tensions . . . . .	73
7.2	Exemples . . . . .	80

<b>8</b>	<b>Torsió</b>	<b>85</b>
8.1	Barres de secció arbitrària . . . . .	85
8.2	Barres de secció circular . . . . .	89
8.3	Exemples . . . . .	90
<b>9</b>	<b>Energia de la deformació</b>	<b>93</b>
9.1	Treball i energia interna . . . . .	93
9.2	Energia d'elements estructurals . . . . .	97
9.3	Principi del treball virtual . . . . .	101
9.4	Principi del treball virtual complementari . . . . .	102
9.5	Teoremes recíprocs . . . . .	103
9.6	Principi de l'energia potencial total mínima . . . . .	104
9.7	Principi de l'energia potencial total complementària mínima . . . . .	104
9.8	Teoremes de Castigliano . . . . .	105
<b>10</b>	<b>Mètodes de càlcul per a barres</b>	<b>107</b>
10.1	Equacions de Navier-Bresse . . . . .	107
10.2	Aplicació directa dels teoremes energètics . . . . .	109
10.3	Mètode matricial: mètode directe de rigidesa . . . . .	109
<b>11</b>	<b>Exemples d'aplicació</b>	<b>133</b>
11.1	Barra sotmesa únicament a esforços normals . . . . .	133
11.2	Estructures articulades . . . . .	136
11.3	Barra sotmesa a esforços de cisallament i moments flectors . . . . .	149
11.4	Estructures reticulades . . . . .	164
<b>12</b>	<b>Introducció breu al vinclament de barres</b>	<b>233</b>
	<b>Índex alfabètic</b>	<b>238</b>

# 1 Introducció

En el disseny dels elements d'una màquina o d'una estructura s'ha de tenir en compte el perill de trencament o deformació perillosa per l'acció de les forces exteriors a què estan sotmesos (fig. 1.1).

La resistència de materials és la branca de la mecànica que estudia els sòlids com a medi continu i susceptible d'experimentar deformacions, i se centra en els aspectes pràctics i que no requereixen una gran aproximació en els resultats; l'elasticitat ho fa en els aspectes més generals i teòrics.

En un cos no deformat, sobre el qual no hi ha forces externes aplicades, la configuració de les molècules correspon a un estat d'equilibri mecànic i tèrmic sense la presència de forces internes (fig. 1.2 a). Això significa que si considerem un volum qualsevol del cos, sobre ell no actua cap força. Aquesta situació és ideal, ja que en la pràctica sempre hi haurà forces externes aplicades, si més no, el pes propi. Quan s'hi apliquen forces externes, el cos es deforma, la posició de les molècules varia i el cos surt de la situació d'equilibri, i apareixen forces al seu interior, anomenades *esforços interns* (fig. 1.2 b).

Si el cos, després de treure la càrrega exterior, recupera totalment la seva forma anterior, es diu que té un comportament perfectament *elàstic*. L'experiència ens diu que quan els esforços interns superen determinats valors, característics del cos, aquest rep una deformació residual o *plàstica*. Els elements de les estructures han de ser *resistents* (que no es trenquin ni que experimentin deformacions plàstiques), també han de tenir suficient *rigidesa* (poc deformables) i han de ser *estables* (conservar la forma).

En fer els càlculs dels diferents elements, s'ha de tenir en compte que, en sotmetre'ls a càrregues de treball, les variacions de forma i dimensions estiguin dintre de les adequades per al funcionament normal de l'element en qüestió. Per exemple, la fletxa màxima permesa d'una biga depèn del tipus d'edifici on ha d'anar col·locada (en un hospital, per exemple, es permet menys fletxa que en un habitatge particular).

La resistència de materials proporciona mètodes per al càlcul dels esforços interns i les deformacions produïdes per aquests en els elements estructurals. Les hipòtesis bàsiques que s'adopten són

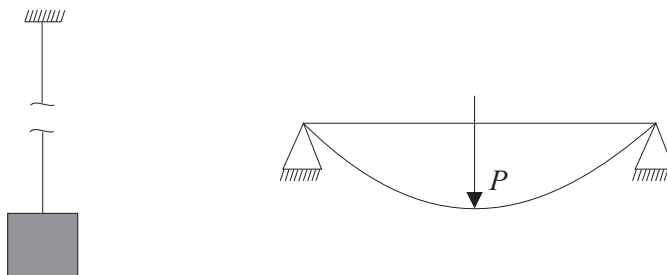


Figura 1.1 Trencaments o deformacions perilloses



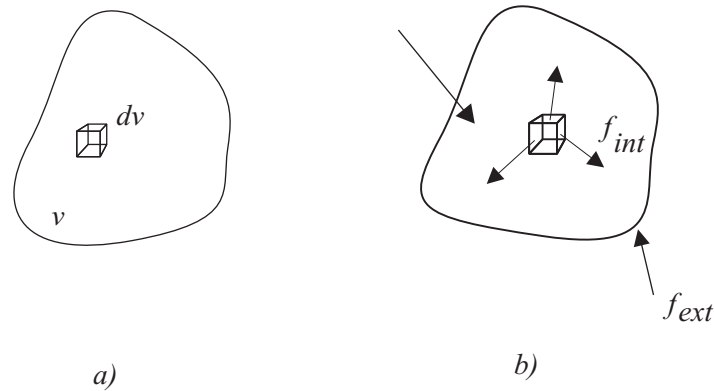


Figura 1.2 a) Cos no deformat, b) cos deformat

les següents: els desplaçaments i les deformacions que es produeixen són molt petits, comparats amb les dimensions dels elements que es tracten. Les forces s'apliquen molt lentament, per la qual cosa podem negligir les vibracions produïdes. El conjunt de l'estructura i qualsevol part d'aquesta està en equilibri estàtic sota l'acció de les forces externes i els esforços interns. Admetem que les forces actuen independentment unes de les altres (*principi de superposició*), és a dir, l'acció conjunta de les forces exteriors és igual a la superposició dels efectes produïts per cada una d'elles, aplicades per separat.

## 2 Deformació i tensió en un punt

### 2.1 Deformació en un punt

Per a la descripció matemàtica del procés de deformació fixem com a origen de coordenades un punt qualsevol a l'espai  $O$ ; a continuació a cada punt  $\overset{\circ}{P}$  del sòlid abans de la deformació li associem un vector  $\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{O}\overset{\circ}{P}$  (fig. 2.1). Les components de  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$  respecte d'una base qualsevol  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  les designem per  $\overset{\circ}{x}_i$ , on  $i = 1, \dots, 3$ . El conjunt format per  $O$  i la base  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  s'anomena *sistema de referència*, i  $\overset{\circ}{x}_i$  són les coordenades de  $\overset{\circ}{P}$  respecte a aquest sistema de referència. Així, a cada conjunt  $\overset{\circ}{x}_i$  li correspon un i solament un punt del cos.

Les corbes formades pels punts obtinguts variant solament una de les coordenades s'anomenen *corbes coordenades*. Si aquestes corbes són línies rectes, llavors les coordenades s'anomenen *rectilínies*, en cas contrari, *curvilínies*.

El producte escalar de dos vectors qualssevol  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$  i  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$  és

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{v}} = \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \overset{\circ}{y}_j \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j = \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{y}_j \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j$$

Definint les quantitats  $\overset{\circ}{g}_{ij}$  per

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j \quad (2.1)$$

escriurem

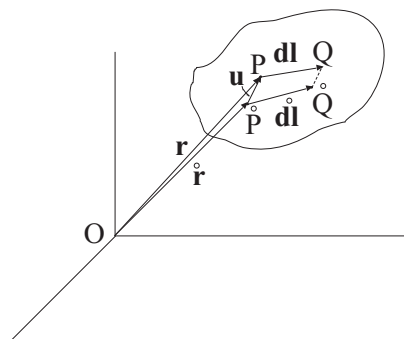


Figura 2.1 Anàlisi de la deformació

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{v}} = \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{y}_j$$

Es pot comprovar que les  $\overset{\circ}{g}_{ij}$  tenen caràcter tensorial; són les components de l'anomenat *tensor fonamental*. Si la base  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  és ortonormal, és a dir, formada per vectors unitaris i ortogonals, com per exemple la base canònica  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , llavors  $\overset{\circ}{g}_{ij} = \delta_{ij}$

La distància entre dos punts molt pròxims ve donada pel producte escalar del vector  $d\overset{\circ}{x}_i$  per ell mateix, és a dir,

$$d\overset{\circ}{l}^2 = \overset{\circ}{g}_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j$$

Quan el cos es deforma, dos punts molt pròxims  $\overset{\circ}{P}$  i  $\overset{\circ}{Q}$  es traslladen a uns nous punts, també molt pròxims,  $P$  i  $Q$  (fig. 2.1). La distància entre  $P$  i  $Q$  serà

$$dl^2 = g_{ij} dx_i dx_j$$

on  $x_i$  són les coordenades respecte del nou sistema de referència i  $g_{ij}$  les components del tensor fonamental en aquest nou sistema de referència.

Una mesura per saber si el cos s'ha deformat o no és la quantitat  $dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2$ , que val

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta - \overset{\circ}{g}_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j$$

podem expressar les coordenades  $x_\alpha$  i  $x_\beta$  en funció de les  $\overset{\circ}{x}_i$  i  $\overset{\circ}{x}_j$ , de manera que obtindrem

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_i} d\overset{\circ}{x}_i \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{\circ}{x}_j} d\overset{\circ}{x}_j - \overset{\circ}{g}_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j = \left( g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{\circ}{x}_j} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right) d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j$$

definint

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{\circ}{x}_j} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right) \quad (2.2)$$

escriurem simplement

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = 2u_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j \quad (2.3)$$

Les quantitats  $u_{ij}$  definides d'aquesta manera són les components d'un tensor. El caràcter tensorial es pot verificar fàcilment considerant un canvi de coordenades i és una conseqüència directa del caràcter tensorial de  $\overset{\circ}{g}_{ij}$  i de  $g_{ij}$ . El tensor  $u_{ij}$  definit per 2.2 va ser introduït per Green i St.Venant i s'anomena *tensor de deformacions de Green* [7], les components  $u_{ij}$  amb  $i = j$  les anomenarem *deformacions normals*, però de vegades se les anomena *deformacions axials* o també *longitudinals*, i les components amb  $i \neq j$  *deformacions de cisallament, tangencials* o *tallants*. De la definició, és clar que el tensor de deformacions és simètric.

Per altra banda, s'observa que una condició necessària i suficient perquè el moviment del cos consisteixi simplement en un moviment com a sòlid rígid, és a dir, en una translació i una rotació, és que totes les components del tensor de deformacions siguin zero.

Si utilitzem, tant en l'estat deformat com en l'estat no deformat, un sistema de referència amb una base ortonormal, per exemple el sistema rectangular cartesià, llavors

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} = \delta_{ij}$$

i 2.2 s'escriurà

### 3 Estudi de les barres

Fins ara hem estudiat la força per unitat de superfície (tensió) en un punt, per a diferents orientacions. En aquest capítol estudiem les forces internes i els moments interns totals fets sobre les seccions transversals dels elements, que anomenem simplement *esforços*, i als capítols següents els relacionarem amb les tensions. Considerem l'exemple que es mostra a la figura 3.1. Com que la força externa és aplicada a B, tan sols apareixen esforços interns a la regió AB de l'element, si s'apliqués la força a C, apareixerien esforços a tot l'element.

L'anàlisi el fem amb barres rectes en l'estat no deformat, i al final del capítol dedicat a la flexió analitzarem les barres amb forta curvatura. Llavors veurem que, si les dimensions transversals de la barra són petites en relació al seu radi de curvatura, les expressions trobades per barres rectes es poden continuar utilitzant.

A l'estat no deformat, prenem l'eix  $X$  tangent a la directriu de la barra en cada punt. Els eixos  $Y$  i  $Z$  els prenem en el pla perpendicular a la directriu i en la direcció dels eixos principals d'inèrcia de la secció transversal (fig. 3.2).

Considerem una barra sobre la qual hi ha aplicades càrregues externes (fig. 3.3). Si tallem per una secció transversal qualsevol, en les seccions tallades existeixen esforços interns que, segons l'estàtica, poden reduir-los a una força  $\mathbf{n}$  i un moment  $\mathbf{m}$  aplicats en un punt qualsevol (prendrem el centroid de la secció). Per calcular-los apliquem les equacions de l'estàtica a qualsevol de les dues parts tallades. És important assenyalar que els esforços interns seran els mateixos si apliquem l'estàtica al tros de l'esquerra que si ho fem al de la dreta, per la tercera llei de Newton, i que són els esforços que actuen en l'estat deformat.

Atès que els desplaçaments els considerem molt petits, juntament amb les deformacions; podem, com a primera aproximació, aplicar l'equilibri en l'estat no deformat per determinar-ne els esforços. Això simplifica molt el problema ja que la geometria de l'estat deformat no la coneixem fins que no resollem les equacions corresponents (les d'equilibri i les que lliguen els esforços amb les tensions).

Així doncs, respecte dels eixos  $X, Y, Z$  de l'estat no deformat,  $n_x$  és un *esforç normal*,  $n_y$  i  $n_z$  són *esforços de cisallament*,  $m_y$  i  $m_z$  són *moments flectors* i  $m_x$  és un *moment torsor*. Si l'únic esforç

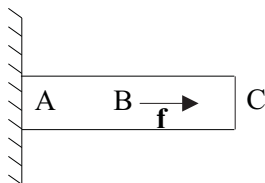


Figura 3.1 Esforços interns al llarg d'una barra

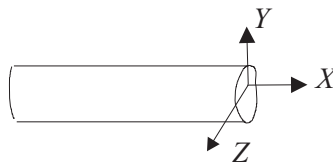


Figura 3.2 Eixos de coordenades.

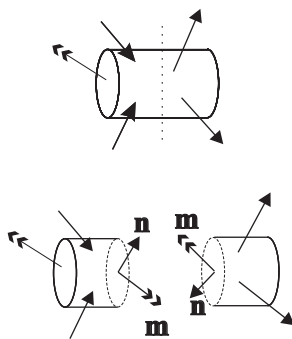


Figura 3.3 Esforços interns

que hi ha present és un esforç normal aplicat al centroide de la secció transversal, llavors l'estat de sol·licitació corresponent s'anomena *tracció o compressió pura*; si està aplicat en un punt diferent del centroide, llavors s'anomena *tracció o compressió excèntrica*. Si l'únic esforç que hi ha present és un moment flector, llavors l'estat de sol·licitació corresponent s'anomena *flexió pura*. I si l'únic esforç que hi ha és un moment torsor, llavors l'estat de sol·licitació corresponent s'anomena *torsió*.

Si la barra té un pla de simetria i les càrregues actuen en aquest pla, llavors només hi haurà tres esforços. Prenent els eixos al  $X, Y$  sobre el pla de simetria, aquests esforços seran:  $n_x, n_y$  i  $m_z$ ; aquestes barres s'anomenen de *pla mitjà*.

Com veurem més endavant, si solament hi ha esforços normals i moments flexors, llavors les seccions transversals es mantenen planes (*hipòtesi de Navier*) i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat. Si es consideren solament les deformacions produïdes per flexió, s'obté l'anomenat *model d'Euler-Bernoulli*. En canvi si existeixen esforços de cisallament deguts a càrregues transversals, llavors els supòsits anteriors no es compleixen; les seccions transversals deixen de mantenir-se planes i, encara que considerem seccions petites, no seran perpendiculars a la línia de centroides. Tampoc no es verifica la hipòtesi de Navier en seccions no circulars sotmeses a moments torsors, com veurem en estudiar la torsió (capítol 8).

### 3.1 Equacions d'equilibri de les seccions

Considerem l'element de barra comprès entre dues seccions transversals molt pròximes (fig. 3.4). Si anomenem  $\mathbf{k}$  la força exterior exercida sobre la unitat de longitud de la barra en l'estat no deformat, l'equilibri de forces per a l'element diferencial estableix que

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} + \mathbf{k} = 0 \quad (3.1)$$

Per establir l'equilibri de moments ho farem respecte del punt  $O$ , que és el centroide de la secció frontal en el sentit d'avanç de la barra (fig. 3.4). Suposem que actua un moment  $I$  per unitat de longitud de la barra de l'estat no deformat.

L'equilibri de moments s'escriurà, negligint infinitiesims d'ordre superior

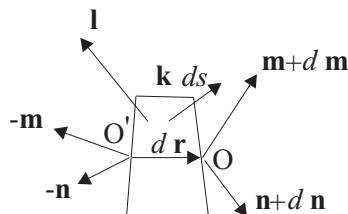


Figura 3.4 Forces i moments en un element diferencial de barra

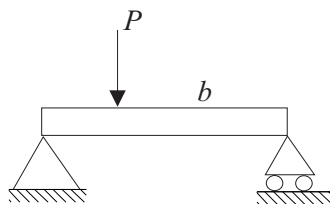


Figura 3.5 Exemple 1

$$d\mathbf{m} + (-d\mathbf{r} \times (-\mathbf{n})) + l ds = 0$$

dividint l'expressió per  $ds$

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{l} = 0 \quad (3.2)$$

Desenvoluparem aquestes equacions més endavant, en parlar de la flexió.

## 3.2 Exemples

### Exemple 1

Trobeu les reaccions externes i dibuixeu els diagrames d'esforços de la barra de la figura 3.5

### Solució

El primer que hem de fer és calcular les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra. Suposem les dues reaccions verticals cap amunt.

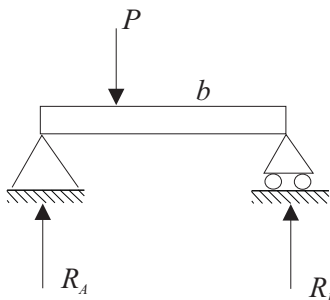


Figura 3.6 Exemple 1. Reaccions externes

## 4 Tracció i compressió pura

S'anomena *tracció o compressió pura* l'estat de sol·licitació en el qual l'únic esforç que hi ha present és un esforç normal aplicat al centroide de la secció transversal.

Considerem una barra rectilínia en l'estat no deformat (fig. 4.1). Com hem fet el capítol 3, prenem l'origen de coordenades al centroide d'una secció transversal qualsevol (prenem la secció central), l'eix  $X$  en la direcció de la barra i  $Y, Z$  sobre la secció transversal i coincidint amb els eixos principals d'inèrcia de la secció.

Suposem ara que als dos extrems s'aplica una força en la direcció  $X$ . En aquest cas, les seccions transversals es mantenen planes i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat. Això es pot comprovar observant la figura 4.1, on s'ha suposat una situació més general (en la qual està inclosa la tracció o compressió pura): que l'esforç normal actua en un punt qualsevol de la secció.

Com que a totes les seccions transversals hi ha el mateix esforç, únicament una força axial, o normal, totes elles es deformen de la mateixa manera. Però, per simetria, la secció del mig es manté plana; per tant, totes les seccions es mantindran també planes. Per simetria, es pot comprovar també que les seccions es mantenen perpendiculars a la línia de centroides; això implica que les deformacions de cisallament, i per tant les tensions de cisallament, són zero en aquesta situació.

Com que totes les seccions es deformen igual, en totes elles hi ha la mateixa distribució de tensions. Podem fixar-nos, doncs, en qualsevol d'elles: prendrem la secció central. Si prenem un petit element de gruix  $dx$  al voltant d'un punt d'aquesta secció, en produir-se la tracció o compressió en varia el gruix, s'allarga o s'escurça segons si està situat per sota o per sobre del centroide de la secció. És a dir, apareixen tensions normals en direcció tangent a la línia de centroides de l'estat deformat, que no coincideix amb l'eix  $X$  per poc que ens apartem de la secció central. D'altra banda, no apareixen tensions de cisallament, com ja hem dit.

Si considerem desplaçaments i deformacions molt petites, podem considerar que la línia de centroides en l'estat deformat coincideix aproximadament amb l'eix  $X$ , és a dir, que el seu pendent és molt petit (això no implica que la curvatura, que està lligada amb la segona derivada i no amb la primera, com el pendent, hagi de ser també igual de petita). Per tant, podem considerar, amb desplaçaments i deformacions molt petits, que les tensions normals que apareixen van en la direcció de  $X$ ; designem-les per  $\sigma_{xx}$ , i que  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$ .

Pel que fa a les tensions  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$ , observem que en el contorn lateral de la barra, com que no hi ha càrregues aplicades, no hi haurà tensió, ni normal ni de cisallament. Prenem un element petit del contorn de superfície  $ds$  (fig. 4.2); és clar que si sobre  $ds$  no hi ha tensió de cap mena i tampoc no hi ha tensions de cisallament sobre cap cara, llavors  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$  han de ser zero en els punts propers al contorn lateral i, per tant, també en els elements del costat. Podem continuar el raonament per contigüitat comprovant així que en tots els punts de la secció transversal  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ .

D'altra banda, l'aproximació esmentada ens permet aplicar l'equilibri en l'estat no deformat per cal-

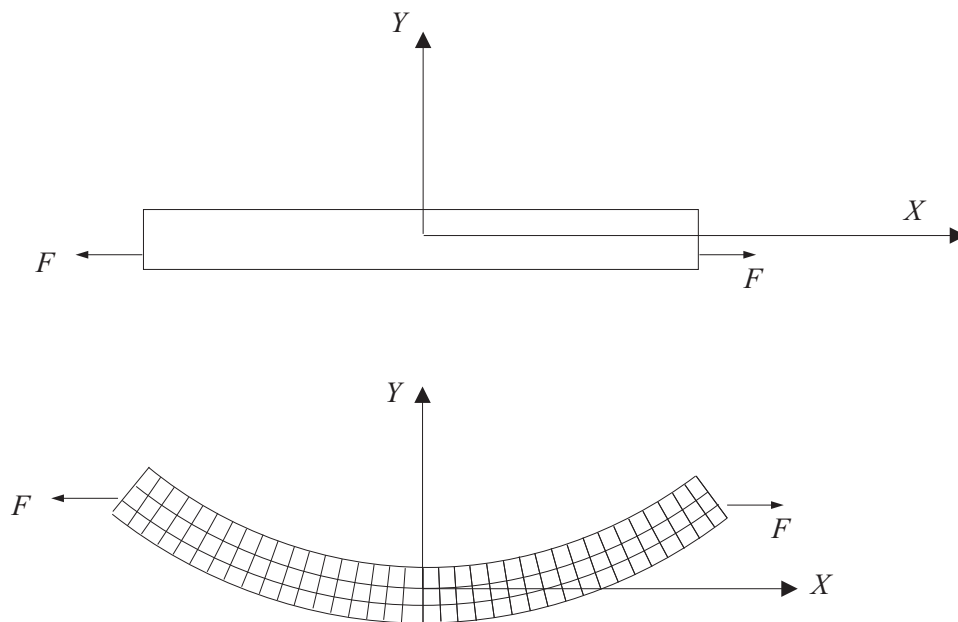


Figura 4.1 Tracció o compressió

cular els esforços a les seccions transversals en comptes de fer-ho a l'estat deformat, que seria el més correcte però ens obligaria a considerar els esforços com a incògnites.

Calculem ara  $\sigma_{xx}$ , que és l'única tensió present, segons hem vist. Considerem un element diferencial limitat per dues seccions transversals separades  $dx$  de la barra rectilínia en el seu estat no deformat (fig. 4.3). En produir-se la tracció o compressió, els punts de la secció es mouen i les longituds de les fibres varien, de manera que una fibra de longitud  $dx$  abans de la deformació passa a mesurar  $dx + dl$  després de la deformació, és a dir, la seva longitud ha variat  $dl$ . El moviment més general que pot fer la secció és una translació més una rotació; això és el que suposarem (fig. 4.3 a).

Amb les aproximacions esmentades, la deformació normal  $u_{xx}$  és

$$u_{xx} = \frac{dl}{dx} \quad (4.1)$$

Si suposem que existeix linealitat entre  $\sigma_{xx}$  i  $u_{xx}$ , és a dir, que es compleix la llei de Hooke, i tenint en compte que  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , segons 2.46 es complirà

$$\sigma_{xx} = E u_{xx} \quad (4.2)$$

on  $E$  és el mòdul de Young, característic de cada material. Aquesta linealitat és aproximada i el seu marge de validesa depèn del tipus de material (per a l'acer, per exemple, és bastant aproximada; per al ferro de fosa, no).

Si considerem el desplaçament relatiu dels extrems de la fibra en comptes de l'absolut, obtenim la posició relativa de dues seccions transversals molt pròximes (fig. 4.3 b).

Com que suposem que cada punt de la secció experimenta un desplaçament tan sols en la direcció  $X$ , la *rotació diferencial*  $d\theta$ , és a dir, la diferència de rotacions entre dues seccions transversals molt properes en produir-se la deformació, serà l'angle entre l'eix  $X$  i el vector normal al pla d'equació

$$dl = A_0 y + B_0 z + C_0 \quad (4.3)$$

Així, si designem per  $\mathbf{t}'$  el vector unitari perpendicular a aquest pla, el *vector rotació diferencial*  $d\vec{\theta}$  s'escriurà com



## 5 Flexió pura

S'entén per *flexió pura* la situació en la qual en les seccions transversals tan sols actua un moment flector. Si la direcció del moment flector coincideix amb un eix principal d'inèrcia, la flexió s'anomena *recta*, si no, *desviada* (fig. 5.1). Analitzem, en primer lloc, una flexió recta.

### 5.1 Flexió recta

L'anàlisi de la flexió recta és semblant a la que hem fet per a la tracció o compressió; en comptes d'una força a cada extrem de la barra, el que hi ha és un moment flector. Per comoditat del lector, repetirem alguns arguments que ja s'han dit al seu moment.

Considerem una barra rectilínia en l'estat no deformat (fig. 5.2). Com vàrem fer al capítol 3, prenem l'origen de coordenades al centroide d'una secció transversal qualsevol, prenem la secció central, l'eix  $X$  en la direcció de la barra i  $Y, Z$  sobre la secció transversal i coincidint amb els eixos principals d'inèrcia de la secció.

Suposem ara que als dos extrems s'aplica un moment flector en la direcció  $z$ . En aquest cas, com també passava en la tracció o compressió pura, les seccions transversals es mantenen planes i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat. Això es pot comprovar observant la figura 5.2; com que a totes les seccions transversals hi ha el mateix esforç, únicament un moment flector, totes elles es deformaran de la mateixa manera. Però, per simetria, la secció del mig es manté plana; per tant, totes les seccions es mantindran també planes. Per simetria, es pot comprovar també que les seccions es mantenen perpendiculars a la línia de centroides; això implica que les deformacions angulars, i per tant les tensions de cisallament, són zero en aquesta situació.

Com que totes les seccions es deformen igual, en totes elles hi ha la mateixa distribució de tensions; podem fixar-nos, doncs, en qualsevol d'elles; prendrem la secció central. Si prenem un petit element de gruix  $dx$  al voltant d'un punt d'aquesta secció, en produir-se la flexió en varia el gruix, que s'allarga o s'escurça depenent de si està situat per sota o per sobre del centroide de la secció. És a dir, apareixen tensions normals en direcció tangent a la línia de centroides de l'estat deformat, que no coincideix amb l'eix  $X$  per poc que ens apartem de la secció central. D'altra banda, no apareixen tensions de cisallament, com ja hem dit.

Si considerem desplaçaments i deformacions molt petits, podem considerar que la línia de centroides en l'estat deformat coincideix aproximadament amb l'eix  $X$ , és a dir, que el seu pendent és molt petit (això no implica que la curvatura, que està lligada amb la segona derivada i no amb la primera, com el pendent, hagi de ser també igual de petit). Per tant, podem considerar, quan tenim desplaçaments i deformacions molt petits, que les tensions normals que apareixen van en la direcció de  $X$ , designem-les per  $\sigma_{xx}$ , i que  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$ .

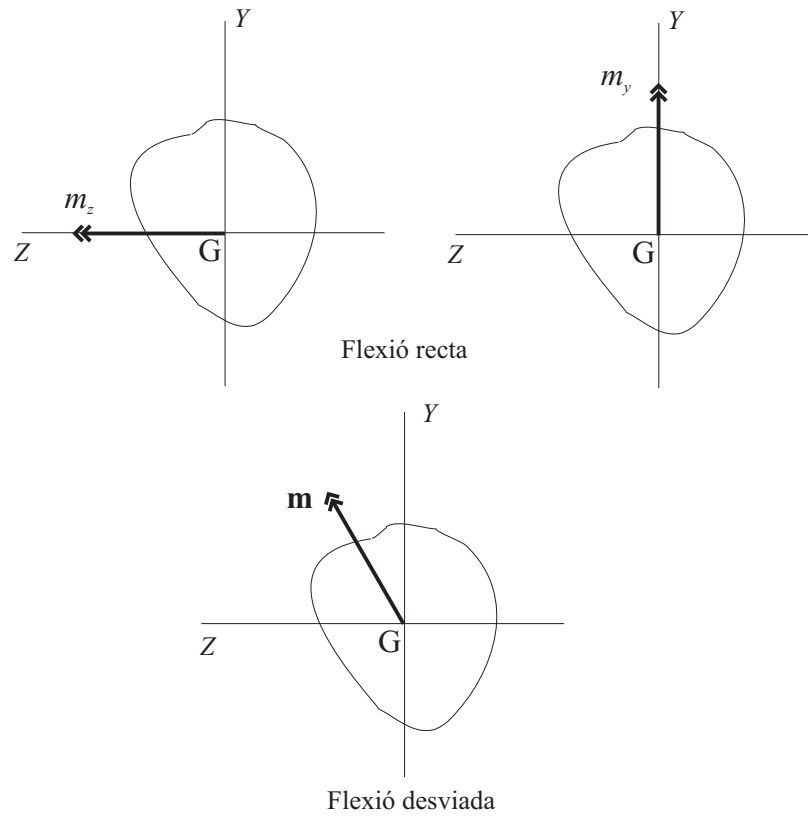


Figura 5.1 Tipus de flexió

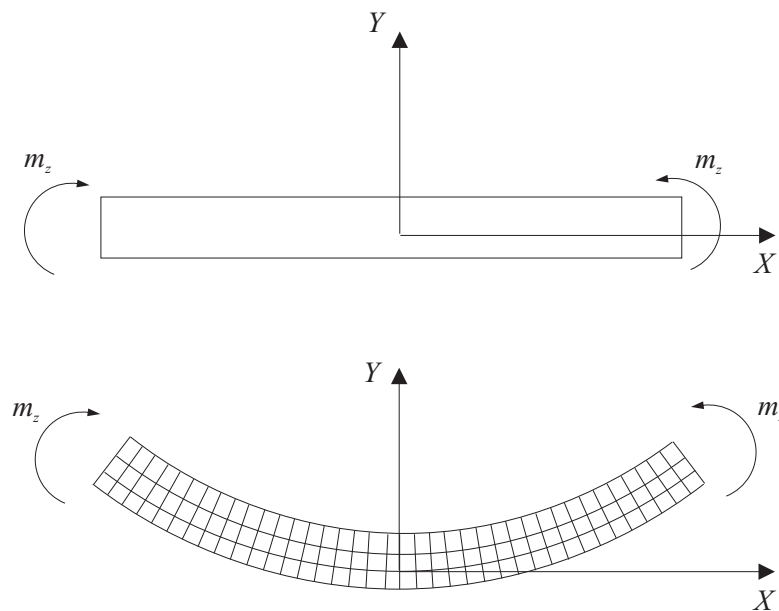


Figura 5.2 Flexió pura recta

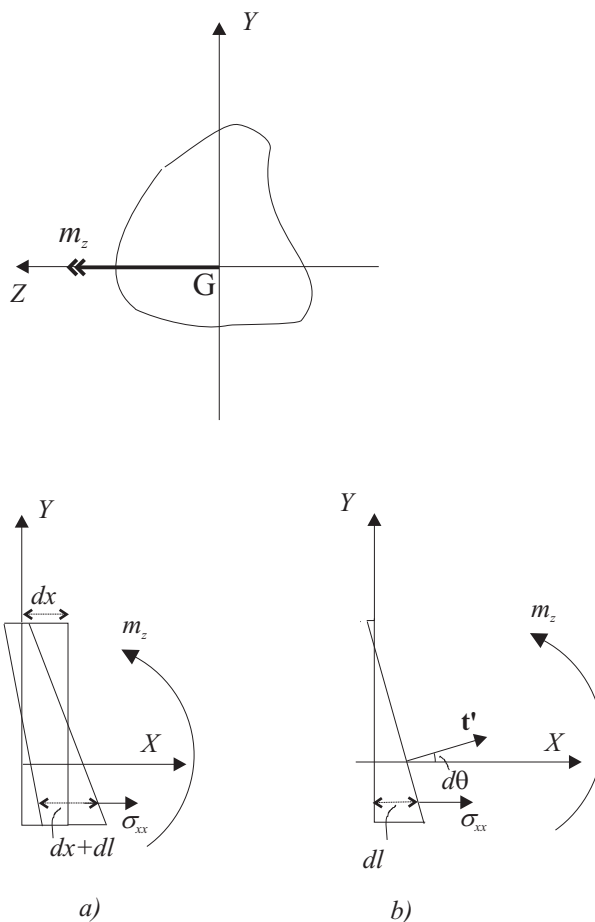


Figura 5.3 Gir de les seccions transversals en la flexió: a) gir absolut. b) gir relatiu

Pel que fa a les tensions  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$ , observem que en el contorn lateral de la barra, com que no hi ha càrregues aplicades no hi haurà tensió, ni normal ni de cisallament. Prenem un element petit del contorn de superfície  $ds$  (fig. 4.2), és clar que si sobre  $ds$  no hi ha tensió de cap mena i tampoc no hi ha tensions de cisallament sobre cap cara; llavors  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$  han de ser zero en els punts propers al contorn lateral i, per tant, també en els elements del costat. Podem continuar el raonament per contigüitat i comprovem que en tots els punts de la secció transversal  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ .

D'altra banda, l'aproximació esmentada ens permet aplicar l'equilibri en l'estat no deformat per calcular els esforços a les seccions transversals en comptes de fer-ho a l'estat deformat, que seria el més correcte però ens obligaria a considerar els esforços com a incògnites.

Calculem ara  $\sigma_{xx}$ , que és lúnica tensió present, com hem vist. Considerem un element diferencial limitat per dues seccions transversals separades  $dx$  de la barra rectílinea en el seu estat no deformat (fig. 5.3). En produir-se la flexió, les seccions giren i, possiblement, es traslladen de manera que una fibra de longitud  $dx$  abans de la deformació passa a mesurar  $dx + dl$  després de la deformació, és a dir, que la seva longitud ha variat  $dl$  (fig. 5.3, a).

Amb les aproximacions esmentades, la deformació normal  $u_{xx}$ , és

$$u_{xx} = \frac{dl}{dx} \quad (5.1)$$

Si suposem que existeix linealitat entre  $\sigma_{xx}$  i  $u_{xx}$ , és a dir, es compleix la llei de Hooke, i tenint en compte que  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , segons 2.46 es complirà

## 6 Tracció i compressió excèntrica

S'anomena *tracció o compressió excèntrica* l'estat de sol·licitació en què a la secció transversal hi ha aplicada tan sols un esforç normal  $N$  en un punt  $P(y^P, z^P)$  diferent del centroide de la secció (fig. 6.1)

### 6.1 Deformacions i tensions

La força  $N$  aplicada al punt  $P$  és equivalent a la mateixa força aplicada a  $G$  més el moment resultant de la translació  $m$ , essent

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{N}$$

on  $\mathbf{r}_P = (0, y^P, z^P)$  i  $\mathbf{N} = (N, 0, 0)$

Efectuant el producte vectorial

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y^P & z^P \\ N & 0 & 0 \end{bmatrix} = Nz^P \mathbf{j} - Ny^P \mathbf{k}$$

és a dir, el moment resultant de la translació té components sobre els eixos  $Y$  i  $Z$ . Podem concloure, doncs, que la força normal  $N$  aplicada fora del centroide és equivalent a una tracció-compressió pura més una flexió desviada, amb  $m_z = -Ny^P$  i  $m_y = Nz^P$ . És a dir, la situació que tenim es resumeix

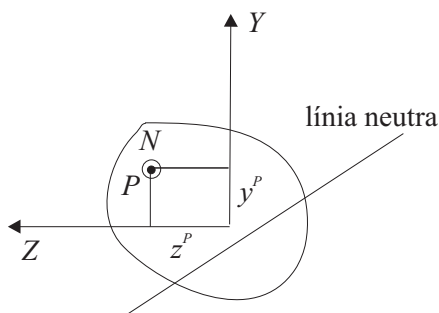


Figura 6.1 Tracció o compressió excèntrica

en

$$\begin{aligned}n_y &= n_z = 0 \\n_x &= N \\m_y &= Nz^P \\m_z &= -Ny^P \\m_x &= 0\end{aligned}$$

Aplicant el principi de superposició escriurem

$$u_{xx} = \frac{N}{EA} + \frac{Ny^P}{EI_z}y + \frac{Nz^P}{EI_y}z$$

i

$$\sigma_{xx} = Eu_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{Ny^P}{I_z}y + \frac{Nz^P}{I_y}z$$

La línia neutra la trobarem fent  $\sigma_{xx} = 0$

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{y^P}{I_z}y + \frac{z^P}{I_y}z \quad (6.1)$$

## 6.2 Nucli central

De l'equació de la línia neutra es dedueix que aquesta no passa pel centroide i, a més, no passa pel mateix quadrant on és aplicada la força  $N$  (hauria de ser  $y > 0$  i  $z > 0$  simultàniament; en cas que  $y^P$  i  $z^P$  també ho fossin, llavors la suma dels tres termes no donaria zero). La línia neutra separa la zona de la secció que treballa a tracció de la que treballa a compressió. Podria ser que la línia neutra fos tangent a la secció o que estigués situada fora d'ella; en aquests casos, tota la secció quedaria a la mateixa banda de la línia neutra i, per tant, apareixerien tensions del mateix signe en tots els punts de la secció. Sigui  $P$  un punt on hauríem de col·locar la força normal per tal que la línia neutra corresponent fos tangent a la secció (fig. 6.2), la distància entre el centroide i la línia neutra és

$$d = \frac{1/A}{\sqrt{\left(\frac{y^P}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{z^P}{I_y}\right)^2}}$$

Si acostem el punt d'aplicació de la força cap al centroide sobre la recta que uneix  $G$  amb  $P$ , la línia neutra s'allunya traslladant-se paral·lelament. Això és degut al fet que, segons 6.1, l'orientació del vector director de la línia neutra no canvia i  $d$  es fa més gran. Per tant, aplicant la força en qualsevol punt del segment  $PG$  tota la secció treballarà a tracció (o bé a compressió si el que hi ha aplicat és una compressió). Fent el mateix procés per a totes les orientacions de la línia  $PG$  i unint tots els punts  $P$  s'obté el contorn del que s'anomena *nucli central*. Així doncs, *aplicant una força de tracció (compressió) en el contorn o a l'interior del nucli central, tota la secció treballarà a tracció (compressió)*. El coneixement del nucli central és necessari en ocasions en què interessa precisament que tota la secció treballi de la mateixa manera, per exemple, en el cas d'un pilar de formigó sobre el qual hi ha aplicada una càrrega de compressió; no convé que apareguin zones de tracció ja que el material la suporta malament.♣

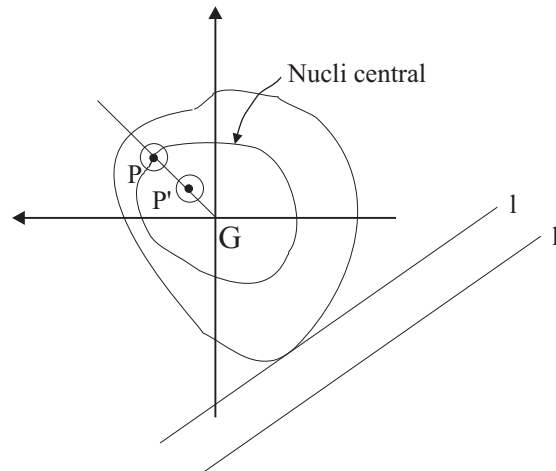


Figura 6.2 Nucli central

### 6.3 Exemples

#### Exemple 1

Trobeu les tensions normals en els punts A, B, C i D de la figura 6.3, l'equació de la línia neutra, i dibuixeu-la

#### Solució

La secció ABCD està sotmesa a una tracció excèntrica de valor  $P$  aplicada en el punt de coordenades  $z_p = -a/2$  i  $y_p = a/2$  (fig. 6.4); per tant, i tenint en compte que  $I_z = 1/12 \cdot ab^3$  i  $I_y = 1/12 \cdot ba^3$ , la tensió normal en cada un dels punts A, B, C i D serà

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A} + \frac{P y_P}{I_z} y + \frac{P z_P}{I_y} z \\ \sigma_A &= \frac{P}{ab} + \frac{P b/2}{\frac{1}{12} ab^3} (-b/2) + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12} ba^3} a/2 = \frac{-5P}{ab} \\ \sigma_B &= \frac{P}{ab} + \frac{P b/2}{\frac{1}{12} ab^3} (-b/2) + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12} ba^3} (-a/2) = \frac{P}{ab} \\ \sigma_C &= \frac{P}{ab} + \frac{P b/2}{\frac{1}{12} ab^3} b/2 + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12} ba^3} (-a/2) = \frac{7P}{ab} \\ \sigma_D &= \frac{P}{ab} + \frac{P b/2}{\frac{1}{12} ab^3} b/2 + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12} ba^3} a/2 = \frac{P}{ab}\end{aligned}$$

La línia neutra té per equació

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{x_1^P}{I_2} x_1 + \frac{x_2^P}{I_1} x_2$$

Substituint dades

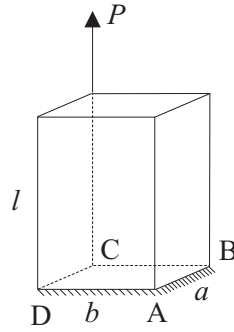


Figura 6.3 Exemple 1

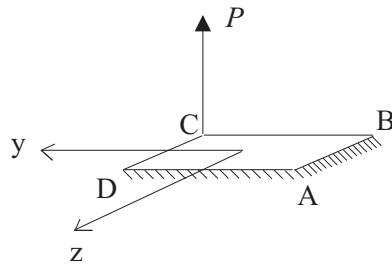


Figura 6.4 Exemple 1. Secció ABCD

$$0 = \frac{1}{ab} + \frac{b/2}{\frac{1}{12}ab^3}y + \frac{-a/2}{\frac{1}{12}ba^3}z$$

$$0 = 1 + \frac{6}{b}y - \frac{6}{a}z$$

a la figura 6.5 està dibuixada la línia neutra sobre la secció.

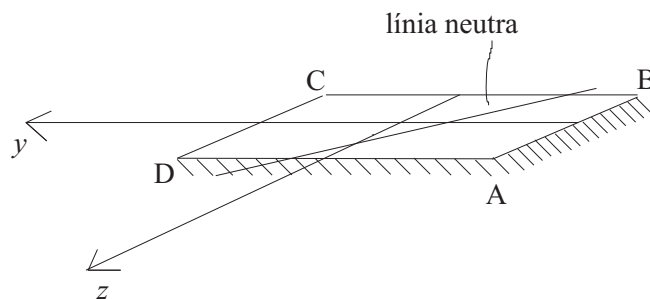


Figura 6.5 Exemple 1. Línia neutra

## 7 Cisallament

### 7.1 Càlcul de les tensions

El raonament de simetria que vàrem fer en l'estudi de la tracció o compressió i en la flexió, que ens permetia establir que, en presència d'aquests esforços, les seccions transversals es mantenen planes i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat, no és vàlid quan tenim esforços de cisallament. No podem imaginar cap situació en la qual, a les seccions transversals, hi hagi un esforç de cisallament constant i a la vegada hi hagi simetria respecte d'una secció central que puguem considerar, doncs, que es manté plana.

Podem imaginar, per exemple, una barra encastada a la esquerra (fig. 7.1 a) i amb una càrrega vertical aplicada a l'extrem. En aquest cas, és cert que l'esforç de cisallament és constant al llarg de la barra; per tant, la deformació per cisallament serà la mateixa en totes elles, però no hi ha simetria respecte d'una secció central. Una altra situació que podem imaginar és una barra recolzada en els dos extrems amb una càrrega vertical aplicada al mig (fig. 7.1 b); en aquest cas, la secció central es manté plana per simetria, però no podem dir que totes les seccions tenen la mateixa deformació per cisallament ja que aquest esforç no és constant en elles (té sentits diferents en les dues meitats).

La conclusió és, doncs, que, en presència d'esforços de cisallament, no hi cap raonament de simetria que faci que es compleixi la hipòtesi de Navier que les seccions es mantenen planes (veurem més avall que, certament, no es mantenen planes). Així; el procediment utilitzat en estudiar la tracció o compressió i la flexió pura no ens serveix per al cas que hi hagi un esforç de cisallament.

Per al càlcul de les tensions seguirem el procediment anomenat *semi-invers*, degut a Saint-Venant. Aquest consisteix a “endevinar” una solució, per analogia amb alguna altra situació similar, i tot seguit provar que és la solució correcta tot demostrant que compleix les equacions de l'elasticitat que ha de complir; que són les equacions d'equilibri, les de contorn i les equacions de compatibilitat. La unicitat

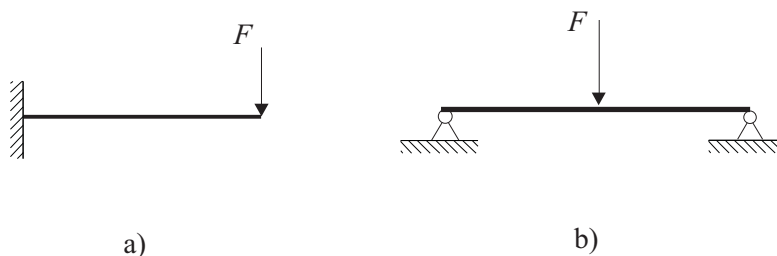


Figura 7.1 Situacions per analitzar el compliment de la hipòtesi de Navier de seccions planes en presència d'esforços de cisallament.



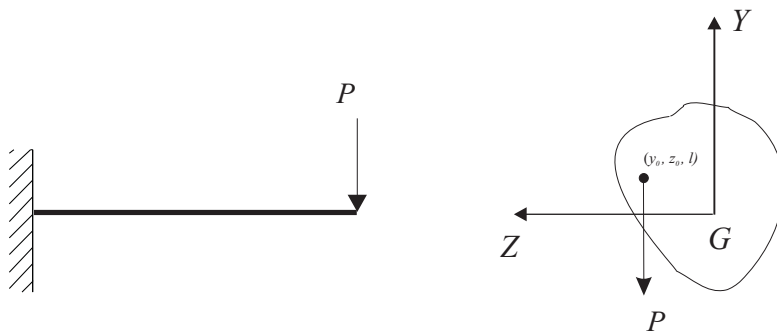


Figura 7.2 Flexió amb càrrega transversal

de la solució està assegurada pel teorema d'unicitat (degut a Kirchoff) [2]. Si la solució de prova conté solament termes lineals o constants per a les tensions (i, per tant, per a les deformacions), i atès que les equacions de compatibilitat 2.22 tenen solament segones derivades de les deformacions, el seu compliment està assegurat. N'hi hauria prou, doncs, que la solució compleixi les equacions d'equilibri i les de contorn.

Sigui una barra rectilínia de longitud  $l$  i de secció arbitrària encastada a l'extrem esquerre i amb una càrrega  $P$  en la direcció d'un dels dos eixos principals de les seccions transversals -suposarem l'eix  $Y$ -, aplicada al punt  $(y_0, z_0, l)$  (fig. 7.2).

En un secció transversal qualsevol situada a distància  $x$  de l'extrem esquerre, el moment flector val

$$m_z = -P(l - x)$$

Per tant, és lògic suposar, per analogia amb la flexió, que l'estat tensional vindrà donat per

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{zy} = 0 \quad \sigma_{xx} = \frac{P(l - x)}{I_z} y$$

i  $\sigma_{xy}$  i  $\sigma_{xz}$  quedaran per determinar. Les tensions així suposades han de complir les equacions d'equilibri, les de compatibilitat i les condicions de contorn.

El compliment de les equacions d'equilibri implica

$$\begin{aligned} -\frac{Py}{I_z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

De la segona i tercera equacions es dedueix que les tensions  $\sigma_{yx}$  i  $\sigma_{zx}$  tenen els mateixos valors en totes les seccions transversals de la barra. La primera equació es pot escriure com

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{xy} - \frac{Py^2}{2I_z} \right) = 0$$

que es compleix idènticament si posem

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \sigma_{xy} - \frac{Py^2}{2I_z} = \frac{\partial F}{\partial z} + f(z)$$

on  $F(y, z)$  és l'anomenada *funció de tensions* i  $f$  és una funció que depèn solament de  $z$  i es determina amb les condicions de contorn. Per tant, obtenim

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{Py^2}{2I_z} + f(z) \quad (7.2)$$

També s'han de complir les equacions de compatibilitat 2.52 en termes de les tensions, equacions de Beltrami-Michell. En aquest cas, es redueixen a

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{zx} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{yx} + \frac{1}{1+\nu} \left( -\frac{P}{I_z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Substituint 7.2 a 7.3 s'obté

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 F) + \frac{P}{I_z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{P}{I_z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

i simplificant

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 F) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{P}{I_z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

i d'aquí podem escriure

$$\nabla^2 F = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Pz}{I_z} - \frac{\partial f}{\partial z} + 2G\alpha$$

on  $2G\alpha$  és una constant d'integració. Més avall veurem el significat físic de  $\alpha$ . Desenvolupant l'operador  $\nabla$  en components

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Pz}{I_z} - \frac{\partial f}{\partial z} + 2G\alpha \quad (7.4)$$

La determinació de l'estat tensional queda resolta quan coneguem  $F$ , i s'han de complir les condicions de contorn, tant en la superfície lateral de la barra com en els extrems ( $f$  vindrà determinada també per les condicions de contorn).

Vegem el significat físic de la constant d'integració  $\alpha$ . Cada element d'àrea de la secció transversal gira en el seu propi pla, és a dir, al voltant de l'eix  $X$ , un angle donat per la component  $x$  del vector de rotació definit a 2.13

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

així, la variació d'aquesta rotació al llarg de l'eix  $X$ , és a dir, la *rotació unitària local* serà en cada punt, tenint en compte 7.2

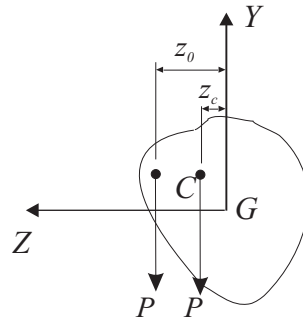


Figura 7.3 Centre de cisallament

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} = \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

substituint 7.4, obtenim

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\nu P z}{EI_z} + \alpha$$

Així, veiem que, en passar els eixos  $Y, Z$  pel centroide de la secció,  $\alpha$  és *el valor mitjà de la rotació unitària dels punts de la secció transversal* (també coincideix amb la rotació unitària local del centroide de la secció). La determinació de  $\alpha$  l'obtindrem resolent 7.4 amb la condició de contorn que la distribució de tensions ha de ser equivalent a  $P$ . Concretament, de l'equivalència de moments respecte de  $G$  (podríem prendre qualsevol altre punt) tindrem

$$\int_A (y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx}) dA = z_0 P$$

on  $A$  és l'àrea de la secció transversal.

Naturalment, si traslladem la càrrega  $P$  paral·lelament a la seva recta d'acció, la distribució de tensions varia i també ho fa la rotació mitjana  $\alpha$ . Hi haurà, doncs, un punt  $C = (y_c, z_c)$  tal que, aplicant-hi  $P$  s'obté  $\alpha = 0$ ; aquest punt s'anomena *centre de cisallament* (també *centre de flexió*). És a dir, si apliquem la càrrega en  $C$ , els diferents punts de la secció poden girar però el gir mitjà és zero.

La localització de  $C$  la podem obtenir de l'equivalència de moments

$$\int_A (y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx}) dA = z_c P$$

on  $\sigma_{zx}$  i  $\sigma_{yx}$  són les tensions presents a la secció quan  $\alpha = 0$ , és a dir, les obtingudes de 7.4 fent  $\alpha = 0$ . Tenint, doncs, la càrrega  $P$  aplicada en un punt qualsevol  $(y_0, z_0, l)$ , podem traslladar-la al centre de cisallament  $C$  afegint-hi un moment de valor  $(z_0 - z_c)P$ . Així, *el problema de la flexió amb càrrega transversal el podem considerar com la superposició de dos problemes més simples: una flexió sense rotació promig (produïda per la càrrega, aplicada al centre de cisallament) més una rotació pura produïda pel moment  $(z_0 - z_c)P$*  (fig.7.3).

Per calcular la distribució exacta de les tensions de cisallament s'ha de resoldre, com hem dit, 7.4 amb les condicions de contorn adequades. Remetem el lector als llibres de Sokolnikoff [12] i Timoshenko i

## 8 Torsió

S'anomena *torsió* l'estat de sol·licitació en el qual, a les seccions transversals, només hi ha un moment torsor aplicat.

### 8.1 Barres de secció arbitrària

Considerem el cas d'una barra rectilínia subjecta per un extrem i amb un moment en la direcció de l'eix de la barra aplicat a l'altre extrem. En aquest cas, el moment torsor present en les seccions transversals és el mateix en totes elles. Prenem l'origen de coordenades en el centroide de la secció transversal situada més a l'esquerra. L'eix  $X$  en la direcció de la barra i els eixos  $Y, Z$ , seguint els eixos principals de la secció (fig. 8.1).

En el cas d'un eix d'una màquina, podem expressar el moment torsor  $m_x$  que actua en l'eix en funció de la potència  $P$  transmesa i la velocitat angular  $\omega$  de gir de la forma següent:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{m_x d\theta}{dt} = m_x \omega$$

on  $\omega$  és la velocitat angular de gir de l'eix.

L'efecte del moment torsor  $m_x$  és fer girar les seccions transversals unes respecte de les altres al voltant de l'eix  $X$  mantenint recta la línia de centroides i, a més, provocar un bombament de les seccions, que serà el mateix en totes elles, ja que l'esforç intern és el mateix.

No hi ha, en aquest cas, cap motiu per suposar que les seccions transversals es mantenen planes; és una situació semblant a la que es produeix en el cas dels esforços de cisallament i que vàrem discutir en el capítol anterior: a totes les seccions transversals hi haurà el mateix moment torsor; per tant, la deformació serà la mateixa per a totes elles, però, igual com passava amb els esforços de cisallament, no hi ha cap secció que per simetria puguem suposar que es manté plana. Si observem la figura 8.2 ens

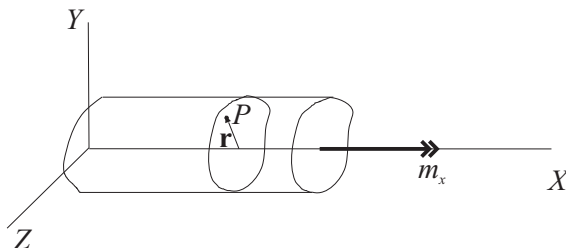


Figura 8.1 Secció sotmesa a torsió

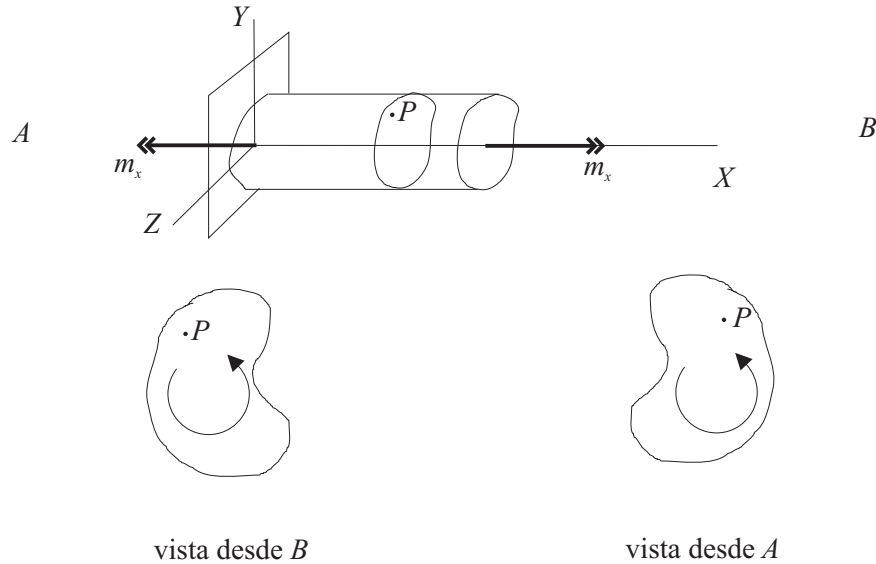


Figura 8.2 Situació per analitzar el compliment de la hipòtesi de Navier de seccions planes en presència de moments torsors.

adonarem de la situació. Si mirem la barra des de  $B$  i veiem que un punt  $P$  s'acosta cap a nosaltres, quan ens ho mirem des de  $A$  no podem dir que també s'ha d'acostar cap a nosaltres, ja que no tenim exactament una situació simètrica (a diferència del que passava en una tracció o compressió excèntrica i en una flexió). Per tant, no podem assegurar que la secció es manté plana.

El mòdul del vector de rotació unitària (que, en aquest cas, només té component en la direcció  $X$ ) l'anomenem *angle de torsió* i el representarem per  $\theta'$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx}$$

on  $\theta$  és la rotació al voltant de l'eix  $X$ .

Per al càlcul de les components del desplaçament  $u$  seguirem el procediment *semi-invers* de Saint-Venant, igual que vèrem fer per a l'esforç de cisallament. La hipòtesi que va fer Saint-Venant per trobar una solució al problema de la torsió d'una barra prismàtica de secció no circular, per analogia amb la barra de secció circular, és que, encara que les seccions es bombin, la projecció de la secció sobre el pla  $Y, Z$  gira com un sòlid rígid (fig. 8.1), és a dir,  $u_y$  i  $u_z$  vénen donades per

$$\theta' x \mathbf{i} \times \mathbf{r}$$

on  $\mathbf{r}$  és el vector posició del punt respecte del centroide de la secció. És a dir

$$\begin{aligned} u_y &= -\theta' xz \\ u_z &= \theta' xy \end{aligned}$$

La component  $x$  del desplaçament, que és la responsable del bombament, ha de ser zero per  $\theta' = 0$  i, a més, no pot dependre de  $x$ , ja que el bombament és el mateix a totes les seccions; l'escriurem com

$$u_x = \theta' \psi(y, z)$$

on  $\psi$  és una certa funció de  $x$  i  $y$  que s'anomena *funció de torsió* o *funció de bombament de Saint-Venant*.

Si coneixem les components del desplaçament, podem calcular les components de la deformació i de la tensió. Atès que els desplaçaments són petits, podem aplicar 2.9; així tindrem, per les deformacions,

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = u_{yz} = 0$$

$$u_{zx} = \frac{\theta'}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right), \quad u_{yx} = \frac{\theta'}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \quad (8.1)$$

i, per a les tensions,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = 2Gu_{zx} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right), \quad \sigma_{yx} = 2Gu_{yx} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \quad (8.2)$$

Fixem-nos que  $u_{ll} = 0$ , és a dir, la traça del tensor de deformacions és zero; per tant la variació de volum és zero; *la torsió és una deformació de cisallament pur*.

Essent  $\sigma_{zx}$  i  $\sigma_{yx}$  les úniques components del tensor de tensions no nul·les, les equacions d'equilibri  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  es redueixen a

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

Substituint  $\sigma_{zx}$  i  $\sigma_{yx}$ , obtenim

$$\Delta \psi = 0 \quad (8.3)$$

on  $\Delta$  és l'operador de Laplace, és a dir, la funció  $\psi$  ha de ser armònica.

És còmode utilitzar una altra funció auxiliar  $\chi(y, z)$ , definida per

$$\sigma_{yx} = 2G\theta' \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \sigma_{zx} = -2G\theta' \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (8.4)$$

la utilitat d'aquesta funció és que permet escriure de manera senzilla les condicions de contorn a la superfície de la barra, ho veurem de seguida.

Substituint 8.4 a 8.2 obtenim

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} + z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial y} - y$$

derivant la primera igualtat respecte de  $z$ , la segona respecte de  $y$  i restant obtenim

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1$$

que escriurem com

$$\Delta \chi = -1 \quad (8.5)$$

Per trobar les condicions de contorn, imposem que sobre la superfície de la barra les forces han de ser zero, és a dir,

$$0 = \sigma_{ik} n_k$$

que, tenint en compte 8.4, es transforma en

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} n_y - \frac{\partial \chi}{\partial y} n_z = 0$$

## 9 Energia de la deformació

### 9.1 Treball i energia interna

Vegem ara el treball fet per les forces, les internes i les externes, durant el procés de deformació. No considerarem les forces externes volúmiques, com podrien ser el propi pes. Si prenem un volum  $dv$ , la força feta sobre ell és  $\mathbf{f}dv$ , essent  $\mathbf{f}$  la força sobre la unitat de volum, segons ja vàrem establir a 2.23. En variar el vector desplaçament  $\mathbf{u}$  una petita quantitat  $\delta\mathbf{u}$ , el treball fet per la força  $\mathbf{f}$  en el volum  $dv$  és

$$f_i \delta u_i dv$$

i, substituint 2.24 i integrant a tot el volum, tindrem

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dv$$

integral que representa el treball total exercit per les forces que actuen sobre el cos en la deformació infinitesimal  $u_i$ . Integrant per parts s'obté

$$\int_S \sigma_{ik} \delta u_i ds_k - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv$$

on la primera integral l'hem transformat en una integral sobre la superfície  $S$  del cos. Aquesta primera integral és el treball de les forces externes mentre ha tingut lloc  $\delta u_i$ . Aquest treball l'analtitzarem més endavant; per tant, deduïm que la segona integral és el treball corresponent a les forces internes, és a dir, als esforços interns. Anomenant  $w$  a aquest treball per unitat de volum escriurem

$$\int_V \delta w dv = - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv$$

expressió que es pot escriure com

$$\begin{aligned} \int_V \delta w dv &= - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv = - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ik} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dv \\ &= - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ik} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dv = - \int_V \sigma_{ik} \delta u_{ik} dv \end{aligned}$$

és a dir,

$$\delta w = -\sigma_{ik} \delta u_{ik} \tag{9.1}$$

Considerarem que la deformació es produeix d'una manera lenta, de tal manera que en tot moment el cos està en equilibri termodinàmic amb l'exterior, és a dir, que el procés de deformació és reversible. En aquestes condicions, la variació infinitesimal de l'energia interna per unitat de volum  $du$  del cos és igual a la diferència entre la calor rebuda i el treball efectuat per les forces internes de l'element de volum, és a dir,

$$du = Tds - dw$$

on  $s$  és l'entropia per unitat de volum i  $T$  és la temperatura. La quantitat  $u$  és, doncs, l'energia interna per unitat de volum i l'anomenarem *densitat d'energia de deformació* i la quantitat  $U = \int_V u dv$ , *energia interna* del cos. En un procés sense intercanvi de calor amb l'exterior tindrem

$$du = \sigma_{ik} du_{ik} \quad (9.2)$$

relació de la qual es dedueix

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial u}{\partial u_{ik}} \quad (9.3)$$

Definim ara una quantitat que ens serà útil més endavant, és la *densitat d'energia complementària de deformació*, que designem per  $u^*$  i definim com

$$u^* = -u + \sigma_{ij} u_{ij} \quad (9.4)$$

Derivant respecte al tensor de tensions

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{\partial u}{\partial \sigma_{kl}} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} u_{ij}$$

aplicant la regla de la cadena  $\frac{\partial u}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial u}{\partial u_{mn}} \frac{\partial u_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$  i tenint en compte 9.3

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = -\sigma_{mn} \frac{\partial u_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} u_{ij}$$

i, canviant els índexs muts  $m, n$  per  $i, j$ , tindrem

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} u_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jl} u_{ij}$$

i finalment

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = u_{kl} \quad (9.5)$$

expressió complementària a 9.3.

Obtindrem ara una expressió per la densitat d'energia interna  $u$  en funció del tensor de deformacions. Ja vàrem dir a la introducció que l'estat no deformat d'un cos és aquell en el qual no hi ha forces externes i, per tant, tampoc no hi ha esforços interns. És a dir, que per  $u_{ik} = 0$  hem de tenir  $\sigma_{ik} = 0$ ; tenint en compte 9.3, arribem a la conclusió que si desenvolupem  $u$  en potències de  $u_{ik}$ , no poden haver-hi en l'expressió termes lineals. Quant als termes de segon grau, podem prendre dos escalars independents del tensor  $u_{ik}$ : el quadrat de la suma dels elements diagonals  $u_{ii}^2$  i la suma  $u_{ik}^2$  dels quadrats dels elements del tensor. Així doncs, desenvolupant  $u$  en sèries de potències de  $u_{ik}$  i quedant-nos solament amb els termes de segon ordre, ja que les deformacions són petites, tindrem

$$u = u_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2 \quad (9.6)$$



les constants  $\lambda$  i  $\mu$  són les constants de Lamé introduïdes a 2.44. Podem obtenir la llei de Hooke diferenciant l'expressió obtinguda per a  $u$ . Per evitar confusions, canviarem la  $i$  per  $l$  al segon terme de la dreta

$$du = \lambda u_{ll} du_{ll} + 2\mu u_{ik} du_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} du_{ik} + 2\mu u_{ik} du_{ik} = (\lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}) du_{ik}$$

i, tenint en compte 9.3

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik} \quad (9.7)$$

que és la llei de Hooke, tal com la vàrem introduir a 2.44; per tant, l'expressió 9.6 establerta per a  $u$  és vàlida en regim elàstic lineal (observeu que hem negligit els termes superiors als de segon ordre).

De 9.6 podem obtenir una altra expressió molt útil en el càlcul d'estructures. Pel fet que  $u$  és una funció quadràtica del tensor de deformació, aplicant el teorema d'Euler

$$u_{ik} \frac{\partial u}{\partial u_{ik}} = 2u$$

tenint en compte 9.3

$$u = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} \quad (9.8)$$

Si substituïm 9.7 a 9.4 s'obté  $u^* = u$ , que és l'anomenada *fórmula de Clapeyron*. És a dir, si es compleix la llei de Hooke, la densitat d'energia de deformació i la densitat de energia complementària de deformació són iguals.

Segons 9.7,  $u_{ik}$  es pot posar com a combinació lineal de  $\sigma_{ik}$ ; per tant, segons 9.8, deduïm que  $u$  també és una funció quadràtica de les  $\sigma_{ik}$  i, aplicant novament el teorema d'Euler,

$$\sigma_{ik} \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}} = 2u$$

tenint en compte novament 9.8, podrem escriure

$$u_{ik} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}} \quad (9.9)$$

fixem-nos que, mentre que 9.3 i 9.5 són relacions vàlides es compleixi o no la llei de Hooke, 9.9 només ho és si la llei de Hooke es compleix.

Hem analitzat fins ara el treball de les forces internes i les magnituds relacionades amb elles; vegem ara el treball de les forces externes. En elements estructurals, si suposem negligibles les forces volúmiques degudes al propi pes, només tindrem les aplicades directament sobre la superfície. Aquestes poden ser càrregues concentrades o repartides i moments concentrats o repartits, i les anomenarem genèricament  $Q_i$ . A cada càrrega generalitzada podem associar un desplaçament generalitzat  $q_i$ ; el sentit físic d'aquest desplaçament el veurem mes endavant, en analitzar el treball fet per les càrregues generalitzades (fig. 9.1).

En general, el desplaçament d'un punt  $q_i$  no depèn solament de la càrrega aplicada en aquell punt sinó també de totes les altres càrregues. En una estructura amb un comportament elàstic podem suposar que aquesta dependència és lineal, és a dir,

$$q_i = c_{ij} Q_j \quad (9.10)$$

on  $c_{ij}$  són els anomenats *coeficients de flexibilitat*. El conjunt de quantitats  $c_{ij}$  rep el nom de *matriu de flexibilitat* de l'estructura; més tard es provarà que és una matriu simètrica. Invertint 9.10 podem escriure

## 10 Mètodes de càlcul per a barres

L'objectiu principal de la mecànica de materials és calcular les forces, tant internes com externes, i les deformacions i els desplaçaments que apareixen en els diversos elements d'una estructura quan aquesta és sotmesa a càrregues externes.

Podem calcular les forces aplicant els procediments vistos fins ara, sempre que l'estructura sigui isostàtica, és a dir, n'hi hagi prou amb les equacions de l'estàtica per resoldre-la. En cas d'estructures hiperestàtiques, es necessiten noves equacions, que, afegides a les de l'estàtica, permeten resoldre el problema. En aquest capítol analitzem el càlcul de les forces, tant reaccions externes com forces internes, i el càlcul dels desplaçaments dels diversos punts de l'estructura, sigui isostàtica o hiperestàtica. De fet, com veurem, el càlcul de forces en estructures hiperestàtiques i el càlcul de desplaçaments van lligats entre si.

Els procediments que s'utilitzen per als càlculs esmentats són: les anomenades equacions de Navier-Bresse, que deduirem a l'apartat 10.1; l'aplicació directa dels teoremes energètics, que veurem a l'apartat 10.2, i els mètodes matricials, que veurem a l'apartat 10.3. Al capítol següent, aplicarem els diversos procediments en diversos exemples, ordenats per ordre creixent de dificultat.

Si l'estructura està formada per barres, sempre es pot resoldre utilitzant els procediments esmentats, encara que el nombre d'equacions per resoldre augmenta de manera important en augmentar les restriccions en els moviments dels diversos elements o la quantitat d'aquests darrers. En aquests casos és útil programar els procediments.

Si l'estructura conté elements com plaques o sòlids, l'obtenció de solucions analítiques és molt complexa o, en moltes ocasions, impossible d'obtenir, i s'ha de recórrer a solucions aproximades consistentes a subdividir l'estructura en elements petits, *elements finits*; resoldre cada un dels elements i connectar-los entre ells per mitjà de les equacions de compatibilitat corresponents.

Considerarem únicament barres rectes en l'estat no deformat, encara que els diferents procediments es poden generalitzar a barres corbes.

### 10.1 Equacions de Navier-Bresse

Considerem una barra recta en l'estat no deformat (fig. 10.1), definim uns eixos locals de manera que l'eix  $\bar{X}$  coincideix amb l'eix de la barra i els eixos  $\bar{Y}$  i  $\bar{Z}$  són eixos principals d'inèrcia de la secció transversal; la coordenada local en direcció de l'eix  $\bar{X}$  la designem per  $s$ . Calculem els desplaçaments i les rotacions de les seccions transversals de barres sotmeses a esforços interns. Considerem que són petits, a més de les deformacions, també els desplaçaments i les rotacions .

El vector de rotació unitària de la secció transversal de la barra que passa per un punt  $P$  de la línia de centroides el designem per  $\vec{\theta}$  i el desplaçament d'aquest punt, per  $d$ .

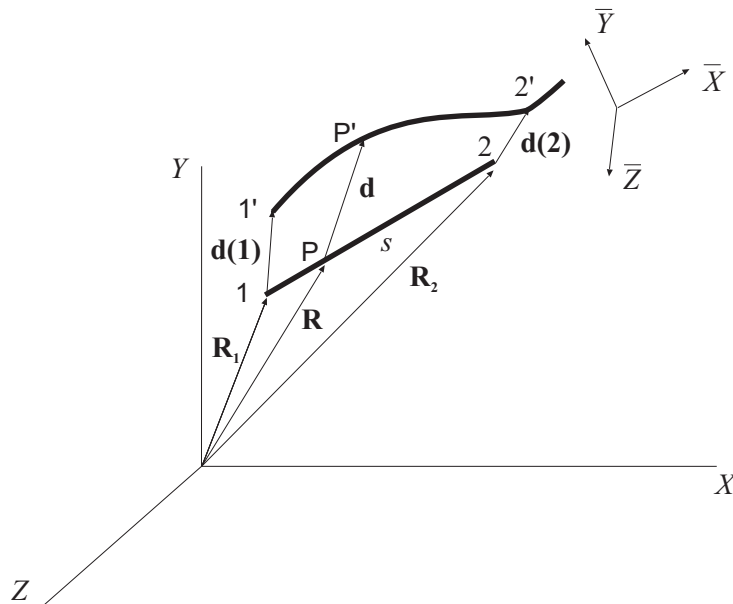


Figura 10.1 Moviments a l'espai

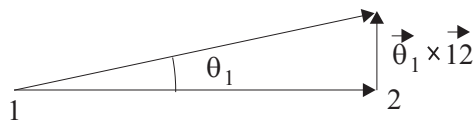


Figura 10.2 Moviment com a sòlid rígid

Com ja s'ha vist, dels sis esforços possibles, només  $m_{\bar{x}}$ ,  $m_{\bar{y}}$  i  $m_{\bar{z}}$  provoquen rotació diferencial entre dues seccions molt properes. Agrupant els resultats obtinguts a 8.10, i 5.7 podem escriure, per a les components del vector de rotació unitària respecte dels eixos locals

$$d\vec{\theta} = \left( \frac{m_{\bar{x}}}{C}, \frac{m_{\bar{y}}}{EI_{\bar{y}}}, \frac{m_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}} \right) ds$$

Cadascuna de les components  $d\theta_i$  és la rotació unitària al voltant de l'eix  $i$  respectiu. Integrant entre dos punts qualssevol de coordenades  $s_1$  i  $s_2$  de la línia de centroids, tindrem

$$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{m_{\bar{x}}}{C} ds \bar{\mathbf{i}} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{m_{\bar{y}}}{EI_{\bar{y}}} ds \bar{\mathbf{j}} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{m_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}} ds \bar{\mathbf{k}} \quad (10.1)$$

on  $\vec{\theta}_1$  és la rotació de la secció 1 i  $\vec{\theta}_2$  de la secció 2.

El desplaçament dels diferents punts de la línia de centroids vénen donats pel moviment com a sòlid rígid (fig. 10.2), més el produït pels esforços. Aplicant el principi de superposició i tenint en compte 4.6, 5.7, 9.22 i 8.10, escriurem

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_2 = & \mathbf{d}_1 + \\
& \vec{\theta}_1 \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) + \\
& \int_{s_1}^{s_2} \frac{n_{\bar{x}}}{EA} ds \bar{\mathbf{i}} + \\
& \int_{s_1}^{s_2} \frac{n_{\bar{y}}}{GA_{s\bar{y}}} ds \bar{\mathbf{j}} + \\
& \int_{s_1}^{s_2} \frac{n_{\bar{z}}}{GA_{s\bar{z}}} ds \bar{\mathbf{k}} + \\
& \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{m_{\bar{x}}}{C} \bar{\mathbf{i}} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) \right] ds + \\
& \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{m_{\bar{y}}}{EI_{\bar{y}}} \bar{\mathbf{j}} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) \right] ds + \\
& \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{m_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}} \bar{\mathbf{k}} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) \right] ds
\end{aligned} \tag{10.2}$$

on  $\mathbf{R}$  és el vector de posició del punt genèric de coordenada  $s$ ,  $\mathbf{R}_1$  el del punt de coordenada  $s_1$  i  $\mathbf{R}_2$  el del punt de coordenada  $s_2$ . Els dos primers termes de la dreta són el desplaçament com a sòlid rígid; els tres següents, els corresponents als esforços normal i de cisallament, i els tres últims, als moments torsor i flectors. Les equacions 10.1 i 10.2 s'anomenen *equacions de Navier-Bresse*.

En el cas bidimensional, considerant que les càrregues actuen en el pla  $X, Y$  i negligint les deformacions per esforços normals i per cisallament, si es designen les components del vector de desplaçament en les direccions dels eixos globals  $X, Y$  per  $u, v$ , respectivament, i per  $m$  el moment flector, 10.1 i 10.2 s'escriuran

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} m ds \\
u_2 &= u_1 - \theta_1 (y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{EI} (y_2 - y) ds \\
v_2 &= v_1 + \theta_1 (x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{EI} (x_2 - x) ds
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Aquestes tres equacions s'anomenen respectivament, *primera, segona i tercera equacions de Navier-Bresse*.

## 10.2 Aplicació directa dels teoremes energètics

Consisteix fonamentalment a aplicar algun dels teoremes energètics per calcular, o bé reaccions desconegudes, o bé desplaçaments o bé ambdues coses. Els més útils en el càlcul són el teorema de l'energia 9.14, amb les expressions obtingudes per a l'energia interna, el principi del treball virtual 9.30, el del treball virtual complementari 9.34 i el mètode de la càrrega unitat 9.36.

## 10.3 Mètode matricial: mètode directe de rigidesa

Aquest procediment consisteix fonamentalment a resoldre 9.11

$$Q_i = k_{ij} q_j$$

que és un sistema d'equacions on les incògnites són les forces generalitzades  $Q_i$  aplicades als nusos i els desplaçaments generalitzats  $q_j$  dels nusos, anomenats també *graus de llibertat de l'estructura*.

## 11 Exemples d'aplicació

Analitzarem diverses estructures de complexitat menor a major, i en alguns exemples aplicarem diversos procediments amb la finalitat de comparare la utilitat de cada un d'ells. Començarem per estructures formades per una única barra sotmesa solament a esforços normals. Després analitzarem estructures articulades bidimensionals formades per diverses barres sotmeses solament a esforços normals; a continuació analitzarem la barra sotmesa a moments flectors i després estructures formades per diverses barres formant una estructura reticulada bidimensional. No s'analitzen estructures tridimensionals, encara que els procediments empleats es poden generalitzar sense cap dificultat a aquest tipus d'estructures.

### 11.1 Barra sotmesa únicament a esforços normals

#### ♠ Exemple 1

Calculeu el desplaçament de l'extrem dret de la barra de la figura 11.1, que té un mòdul de Young  $E$ , secció transversal  $A$  i longitud  $l$ .

*Procediment: teorema de l'energia*

Aplicant el teorema de l'energia 9.14, durant el procés de deformació

$$W_E = U$$

L'única força que fa treball durant la deformació és  $P$

$$W_E = \frac{1}{2} P u_B$$

Per altra banda, aplicant 9.17 i tenint en compte que  $u_A$  és zero

$$U = \frac{1}{2} k u_B^2$$



Figura 11.1 Exemple 1

i, igualant

$$u_B = \frac{P}{k} = \frac{PL}{EA}$$

*Procediment: principi del treball virtual*

Aplicant el principi del treball virtual 9.30,

$$\delta W_E = \delta U \quad (11.1)$$

Permetem un desplaçament virtual en el punt  $B$ ,  $\delta u_B$ . El treball de les forces externes  $\delta W_E$  és

$$\delta W_E = P\delta u_B$$

Per calcular la variació d'energia interna, tenint en compte 9.17, i derivant respecte de  $u_B$ ,

$$\delta U = k u_B \delta u_B$$

aplicant 11.1

$$P\delta u_B = k u_B \delta u_B$$

d'on

$$P = k u_B \quad (11.2)$$

i, finalment

$$u_B = \frac{P}{k} = \frac{Pl}{EA}$$

Segons l'equació 11.2 i tenint en compte 9.11, resulta que  $k$  és el coeficient de rigidesa de la barra. Tornarem a aquesta qüestió quan analitzem el càlcul d'estructures formades per diverses barres connectades.

*Procediment: mètode de la càrrega unitat*

El mètode de la càrrega unitat s'escriu com 9.36

$$q = \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{ij} dv$$

on  $q$  és el desplaçament generalitzat del punt  $B$ , que el designarem per  $u_B$ . Atès que només tenim esforços normals, solament tindrem tensions i deformacions en la direcció normal, que anomenarem, respectivament,  $\bar{\sigma}_{xx}$  i  $u_{xx}$ . Així,

$$u_B = \int_V \bar{\sigma}_{xx} u_{xx} dv$$

Sabem que

$$u_{xx} = \frac{P}{EA}$$

$\bar{\sigma}_{xx}$  és la tensió que apareixerà a la barra si apliquem una càrrega horitzontal unitat en el punt  $B$ , i serà

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{A}$$

així doncs, tindrem

$$u_B = \int_V \bar{\sigma}_{xx} u_{xx} dv = \int_0^l \frac{1}{A} \frac{P}{EA} dx = \frac{Pl}{EA}$$

## 12 Introducció breu al vinclament de barres

Una configuració en equilibri pot ser estable, neutra (indiferent) o bé inestable (fig. 12.1).

En l'equilibri estable, si s'altera lleugerament la posició, el sistema torna a la posició inicial. En l'equilibri neutre, si s'altera lleugerament la posició, el sistema continua en el mateix estat. En l'equilibri inestable, si s'altera lleugerament la posició, el sistema s'allunya cada vegada més de la posició inicial. La inestabilitat en una estructura pot estar motivada per falta de suport o per falta de gruix o esveltesa (fig. 12.2).

Definim el *vinclament* com una falla provocada per una inestabilitat deguda a l'acció de compressió sobre un element de l'estructura que, en general, es presenta de forma sobtada. La càrrega que dona lloc al vinclament es denomina *càrrega crítica*  $P_{cr}$  i la tensió corresponent,  $\sigma_{cr}$ . Aquests valors poden estar molt per sota dels admissibles per tracció o compressió en flexió.

Considerem una barra prima i rectilínia en l'estat de referència, sotmesa a una força de compressió  $P$  (fig. 12.3). Prenem l'eix  $X$  en la direcció de la barra i els eixos  $Y, Z$  com a eixos principals d'inèrcia sobre la secció transversal. Suposarem que la barra es vincla únicament al voltant d'un eix; el de menor moment d'inèrcia, que suposem que és el  $Z$ .

Quan la barra es vincli, perdrà la forma rectilínia i apareixerà un moment flector  $m_z$ , a més de l'esforç normal  $n_x = -P$ . Utilitzant 5.18 i tenint en compte que no hi ha forces externes en direcció  $Y$  ni en  $Z$ , escriurem

$$EI_z y^{(IV)} + Py'' = 0 \quad (12.1)$$

L'equació 12.1 admet, evidentment, la solució  $y = 0$ , és a dir, un equilibri en el qual la barra es manté rectilínia. Aquest equilibri és estable sempre que  $P$  no superi un valor determinat, que és la càrrega crítica  $P_{cr}$ . Per a valors superiors a  $P_{cr}$ , la forma rectilínia de la barra correspon a un equilibri inestable, és a dir, que qualsevol pertorbació feta a la barra fa que aquesta es flexioni fortament. Per a  $P = P_{cr}$ , la forma rectilínia correspon a un equilibri indiferent, és a dir, que a més de la solució  $y = 0$  existeixen altres solucions no rectilínies. Podem dir, doncs, que  $P_{cr}$  és el valor més petit de  $P$  per al qual 12.1 admet una solució no nul·la.

Vegem ara les condicions de contorn que s'han de complir segons quins siguin els lligams de la barra amb l'exterior. En el cas d'un encastament, a l'extrem encastat el desplaçament és zero i la tangent



Figura 12.1 Tipus d'equilibri

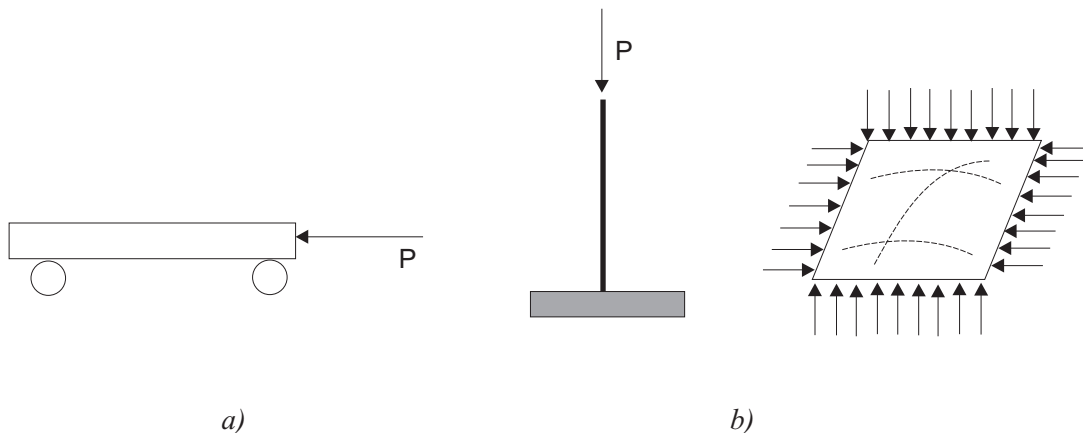


Figura 12.2 Inestabilitats (a) per falta de suport, (b) per falta de gruix



Figura 12.3 Barra sotmesa a compressió

de la directriu serà també zero, és a dir, tindrem

$$y = 0 \qquad y' = 0$$

En un extrem on hi hagi una articulació, el desplaçament serà zero i el moment també, és a dir,

$$y = 0 \qquad y'' = 0$$

En un extrem lliure de subjeccions, és a dir, on solament hi hagi la força de compressió aplicada, el moment serà zero, és a dir,  $y'' = 0$ . Per altra banda (fig. 12.7), l'esforç de cisallament és  $P \sin \alpha$ , que es pot aproximar per  $P \tan \alpha = Py'$  si considerem que  $\alpha$  és petita.

Tenint en compte 5.17, podem escriure, doncs,

$$y''' = \frac{-P}{EI_z} y' \tag{12.2}$$

Vegem ara com calcular  $P_{cr}$  per a diferents condicions de contorn de la barra.

a) barra articulada-articulada

Analitzem el cas d'una barra de longitud  $l$ , articulada en els dos extrems (fig. 12.4)

Per la teoria de les equacions diferencials, sabem que una del tipus 12.1 admet una solució de la forma

$$y = A + Bx + C \sin kx + D \cos kx \tag{12.3}$$

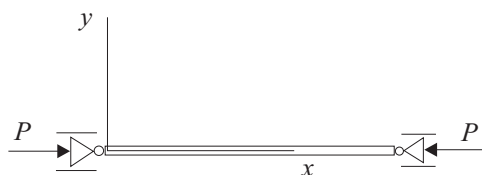


Figura 12.4 Barra articulada-articulada