TEMES CLAU

José A. Lubary Martínez
Josep M. Brunat Blay

CÁLCULO PARA INGENIERÍA INFORMÁTICA

TEMES CLAU 08

CÁLCULO PARA INGENIERÍA INFORMÁTICA

José A. Lubary Martínez
Josep M. Brunat Blay

UPC Edicions UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Diseño de la cubierta: Ernest Castelltort
Diseño de colección: Tono Cristòfol
Maquetación: Mercè Aicart

Primera edición: julio de 2008

© Edicions UPC, 2008
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 137 540 Fax: 934 137 541
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.edu

Producción: Book Print Digital, S.A.
Botànica, 173-176
08908 L'Hospitalet de Llobregat

Depósito legal: B-33.319-2008
ISBN: 978-84-8301-959-7

Índice

Prólogo 9

1 Números reales y complejos

Resumen teórico 11
El cuerpo de los números reales 11
Relación de orden 12
Los números naturales 12
Los números enteros 12
Los números racionales 13
Valor absoluto, intervalos y cotas 13
Los números complejos 14
Módulo y argumento. Raíces n-ésimas 15
Polinomios 16
Polinomios de grado dos 17
La factorización de polinomios 18
El binomio de Newton 18
Problemas resueltos 19
Problemas propuestos 26

2 Funciones

Resumen teórico 29
Funciones reales de una variable real 29
Límites 30
Asíntotas 33
Continuidad 33
Derivación 34
Monotonía 35
Extremos relativos 35
Teoremas del valor medio 36
La regla de l'Hôpital 36
Convexidad 37
Funciones elementales 38
Polinomios 38
Funciones racionales 39

Funciones potenciales 39
Funciones circulares 39
Funciones exponenciales y logarítmicas 42
Funciones potenciales-exponenciales 43
Funciones hiperbólicas 44
Tabla de derivadas 46
Problemas resueltos 46
Problemas propuestos 78

3 Sucesiones
Resumen teórico 83
Sucesiones 83
Cotas 84
Límites 84
Sucesiones monótonas 85
Criterios para el cálculo de límites 86
Subsucesiones. Límites de oscilación 87
Problemas resueltos 88
Problemas propuestos 105

4 Primitivas
Resumen teórico 109
Primitivas 109
Integrales inmediatas 110
Cambio de variable 110
Integración por partes 111
Integrales racionales 111
Integrales trigonométricas 114
Integrales irracionales 115
Primitivas no expresables como combinación de funciones elementales 116
Problemas resueltos 116
Problemas propuestos 136

5 Integración
Resumen teórico 139
La integral de Riemann 139
Criterios de integrabilidad 142
Propiedades de la integral 142
El teorema fundamental del cálculo 143
Áreas y volúmenes 144
La integración numérica 145
El método de los trapecios 145
El método de Simpson 146
Integrales impropias 146
Integrales impropias de primera especie 146
Integrales impropias de segunda especie 148
Problemas resueltos 150
Problemas propuestos 171

6 Series numéricas
Resumen teórico 175
Series 175
Criterios de convergencia para series de términos positivos 177
Otros criterios 178
Sumas aproximadas 179
Problemas resueltos 180
Problemas propuestos 201

7 Polinomios de Taylor, series de potencias y series de Taylor
Resumen teórico 205
El polinomio de Taylor 205
El teorema de Taylor 208
Cota del error 209
Estudio local de funciones 209
Series de potencias 210
La serie de Taylor 213
Problemas resueltos 214
Problemas propuestos 250

8 Funciones de varias variables
Resumen teórico 253
El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ 253
Topología de $\mathbb{R}^n$ 254
Funciones de varias variables: conceptos generales 255
Límites y continuidad 255
Coordenadas polares 257
Derivadas direccionales y derivadas parciales 257
Diferenciabilidad 258
Derivadas de orden superior. El polinomio de Taylor 260
Funciones implícitas e inversas 262
Extremos relativos 264
Extremos condicionados 266
Extremos absolutos 267
Problemas resueltos 267
Problemas propuestos 303

Apéndice. Las cónicas
Secciones cónicas 307
La elipse 308
La parábola 309
La hipérbola 310

Respuestas a los problemas propuestos 313

Bibliografía 325

Prólogo

En este texto hemos seleccionado los temas típicos de los cursos de cálculo de las ingenierías informáticas. Sin embargo, otros estudios técnicos tienen numerosos temas en común; por ello, pensamos que el texto puede ser útil también en las asignaturas de cálculo de otras ingenierías. Por otra parte, que el texto incluya de forma coherente los conceptos y las técnicas del cálculo de bachillerato necesarios para este curso, sirve para que el estudiante los repase si no los recuerda o, en el peor de los casos, estudie lo que debería ya saber pero no sabe. El libro es, pues, esencialmente utilitario.

El texto está dividido en ocho capítulos. En los dos primeros (números reales y complejos y funciones), predominan los temas de bachillerato, aunque con un enfoque más formal que el usual en este nivel. En los tres siguientes (sucesiones, primitivas e integración), los niveles de bachillerato y universidad están más repartidos. Los últimos tres capítulos, (series numéricas, polinomios de Taylor series de potencias y series de Taylor y funciones de varias variables), en cambio, son de nivel exclusivamente universitario. El símbolo □ significa que lo que sigue debería ser comprendido por un estudiante de bachillerato, mientras que el símbolo ■ corresponde al nivel universitario. En los resúmenes teóricos, algunos aspectos están a medio camino: son conceptos que el estudiante debe haber visto, pero quizás en un contexto menos general. Por ejemplo, un estudiante de bachillerato debería tener una idea de lo que significa la integral definida de una función continua; sin embargo, en el texto se trata el concepto de función acotada integrable. No es un concepto completamente nuevo, pero tampoco se supone que el estudiante lo domine en esta versión. Hemos indicado estas situaciones ambiguas con el símbolo ◨. A pesar de todo, hay que reconocer que la división en niveles tiene un alto grado de arbitrariedad, dependiendo del tipo de cursos que se hayan recibido en bachillerato, de los temas en los que se haya hecho mayor hincapié y, naturalmente, de la capacidad de cada estudiante.

El intento de abarcar niveles distintos provoca, de forma natural, una dificultad poco uniforme. Hay ejercicios rutinarios y elementales típicos del bachillerato. Otros problemas ilustran técnicas bien conocidas y sirven como modelo. Algunos requieren algo de ingenio. Otros –muy pocos– son mencionados a menudo en textos teóricos y prácticos, pero no detallados tan a menudo, y nos ha parecido oportuno incluirlos.

Agradeceremos a los lectores que detecten errores de cualquier tipo que nos lo hagan saber enviando un correo electrónico a cualquiera de las dos direcciones

Jose.A.Lubary@upc.edu   Josep.M.Brunat@upc.edu

José Antonio Lubary, Josep M. Brunat   Barcelona, abril de 2008

1 Números reales y complejos

Resumen teórico

El cuerpo de los números reales

El conjunto $\mathbb{R}$ de los *números reales* se construye de forma que a cada punto de una recta corresponda un número real, y viceversa. Independientemente de la construcción formal, resumimos las propiedades, que se suponen conocidas.

En $\mathbb{R}$ está definida una *suma* que hace corresponder a cada dos números reales a y b otro número real $a+b$. Esta operación tiene las siguientes propiedades:

- (Asociativa) $a+(b+c)=(a+b)+c$ para todo $a,b,c\in\mathbb{R}$.
- (Conmutativa) $a+b=b+a$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$.
- (Existencia de elemento neutro) Existe un número real 0 tal que $a+0=a$ para todo $a\in\mathbb{R}$.
- (Existencia de opuestos) Para cada número real a, existe un número real $-a$ tal que $a+(-a)=0$.

En $\mathbb{R}$ está definida una segunda operación, el *producto*, que también hace corresponder a cada dos números reales a y b otro número real ab. Esta operación tiene las siguientes propiedades:

- (Asociativa) $a(bc)=(ab)c$ para todo $a,b,c\in\mathbb{R}$.
- (Conmutativa) $ab=ba$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$.
- (Existencia de elemento neutro) Existe un número real 1 tal que $a\cdot 1=a$ para todo $a\in\mathbb{R}$.
- (Existencia de inversos) Para todo $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, existe un número real a^{-1} (denotado también $1/a$) tal que $a\cdot a^{-1}=1$.

Finalmente, la propiedad distributiva relaciona ambas operaciones:

- $a(b+c)=ab+ac$ para todo $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Un conjunto con dos operaciones que cumplen todas las propiedades anteriores se denomina un *cuerpo*. Estas propiedades justifican convenios usuales, como no escribir paréntesis cuando hay más de dos sumandos o factores, escribir $a-b$ por $a+(-b)$, etc. De ellas también se deducen propiedades bien conocidas, como $-(a+b)=-a-b$, las leyes de simplificación para la suma ($a+c=b+c \Leftrightarrow a=b$) y para el producto ($ac=bc\Leftrightarrow a=b$, si $c\neq 0$), etc.

Relación de orden

En $\mathbb{R}$ está definida una relación de orden $\leq$. La notación $a < b$ significa $a \leq b$ y $a \neq b$. Esta relación es *total*, lo que significa que, dados dos reales a y b, se cumple exactamente una de las tres propiedades $a < b$, $a = b$ o $a > b$. El comportamiento de la relación de orden respecto a las operaciones es el siguiente. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$,

- $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.
- Si $c > 0$, entonces $a < b \Leftrightarrow ac < bc$.
- Si $c < 0$, entonces $a < b \Leftrightarrow ac > bc$.

Los números naturales

El conjunto de los *números naturales* es el subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ formado por los números obtenidos sumando 1 consigo mismo repetidamente: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. La suma y el producto de dos naturales es un natural. Ciertamente, las propiedades válidas para todos los reales (asociativas, conmutativas, distributiva, etc.) son en particular válidas para los naturales. Observemos, sin embargo, que el neutro de la suma 0 no es natural, que el opuesto de un natural no es un natural y que el inverso de un natural tampoco es un natural, con la excepción de 1, que es su propio inverso.

Restringido al conjunto de los naturales, la relación de orden tiene al menos dos propiedades particulares relevantes. La primera es que, si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ no vacío, entonces existe un elemento $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$; este elemento se denomina *mínimo* o *primer elemento de* A. La segunda es la siguiente.

Principio de inducción. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y m su mínimo. Si $n \in A$ implica $n + 1 \in A$, entonces $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Los números enteros

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los *números enteros* está formado por los naturales, el 0 y los opuestos de todos los naturales: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. La suma y el producto de dos enteros son enteros. En los enteros, estas operaciones tienen las mismas propiedades que la suma y el producto de números reales, con la excepción de que en los enteros no es cierto que cada entero $a \neq 0$ tenga inverso entero para el producto (de hecho, sólo 1 y -1 tienen inverso). La definición de *anillo conmutativo* es similar a la de cuerpo, excepto que no se exige la existencia de inversos para el producto. Así, $\mathbb{Z}$, con la suma y el producto, es un anillo conmutativo.

Si a, b y c son números enteros y $a = bc$, se dice que b es un *divisor* de a o que *divide* a a y que a es un *múltiplo* de b. Un número entero *primo* es un entero $p > 1$ tal que no tiene ningún divisor positivo d tal que $1 < d < p$. Los números primos tienen la siguiente propiedad.

Teorema fundamental de la aritmética. Si $n \neq 0$ es un número entero, entonces existen $\alpha \in \{+1, -1\}$, números primos $p_1, \ldots, p_k$ y números naturales $n_1, \ldots, n_k$ únicos tales que

$$n = \alpha p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \qquad p_1 < p_2 < \cdots < p_k.$$

Señalemos que las demostraciones conocidas de este teorema *no* son constructivas, es decir, no indican cómo, dado n, hallar los primos $p_1, \ldots, p_k$ que lo dividen; además, los métodos conocidos para hallar la factorización son poco eficientes si n es suficientemente grande.

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (0 \le k \le n).$
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \quad (1 \le k \le n).$

Los números binomiales aparecen en la fórmula del *binomio de Newton*. Aunque esta fórmula será aplicada esencialmente a polinomios, hay que remarcar que es válida en todo anillo conmutativo. Si $n \ge 0$ es un natural, y a y b son elementos de un anillo conmutativo (por ejemplo, polinomios), entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

En el caso de los polinomios, esta fórmula puede interpretarse como una factorización del término de la derecha. Otras factorizaciones a menudo útiles son las siguientes:

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots ab^{n-1} + b^{n-1}).$
- Si n es impar, $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$

Como casos particulares:

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$
- $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$
- Si n es impar, $a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1).$

Problemas resueltos

1

Demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

[Solución]

Notemos, en primer lugar, que $\sqrt{2}$ es un número real, ya que es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, y dicha longitud corresponde ciertamente a un punto de la recta real.

Notemos también que, si m es un entero, entonces m y m^2 tienen los mismos factores primos. Por tanto, m es par si, y sólo si, m^2 es par.

Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, y sea m/n la fracción irreducible correspondiente a dicho racional:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad m \text{ y } n \text{ primos entre sí.}$$

Deducimos que $m^2 = 2n^2$, luego m^2 es par y, por tanto, m también; es decir, $m = 2p$ para algún entero p. Entonces

$$m^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; 4p^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; 2p^2 = n^2,$$

luego n^2 es par y, en consecuencia, n es par. Pero entonces m y n son ambos pares y resulta que la fracción m/n no es irreducible, lo que es contradictorio. Por tanto hemos de concluir que $\sqrt{2}$ no es racional.

2

Sean a y b números reales con $a < b$. Demostrar:

1) $a < (a+b)/2 < b$.

2) Si a y b son racionales, entonces $(a+b)/2$ es racional.

[Solución]

1) Sumando a a los dos términos de $a < b$, resulta $2a < a + b$; dividiendo por 2, se obtiene $a < (a+b)/2$. Análogamente, sumando b, tenemos $a + b < 2b$ y, dividiendo por 2, resulta $(a+b)/2 < b$.

2) Si a y b son racionales, son de la forma $a = p/q$ y $b = r/s$ con p, q, r, s enteros y $q \neq 0 \neq s$. Entonces

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{ps+qr}{2qs},$$

que es un número racional.

3

Sean $a \geq 0$ y $b \geq 0$ números reales. Demostrar que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ (es decir, la media geométrica de dos números es menor o igual que su media aritmética[2]).

[Solución]

Puesto que $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, tenemos $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$, de donde $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dividiendo por 2 se obtiene la desigualdad.

4

Hallar todos los números reales que satisfacen la desigualdad $x^2 > 3x + 4$.

[Solución]

Observemos que $x^2 > 3x + 4 \iff x^2 - 3x - 4 > 0$.

Descomponemos el polinomio $x^2 - 3x + 4$ resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x - 4 = 0$. Obtenemos las soluciones $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$. Entonces, la desigualdad es equivalente a

$$(x+1)(x-4) > 0,$$

que se satisfará si ambos factores son positivos o ambos negativos:

$$x+1 > 0,\ x-4 > 0 \iff x > -1,\ x > 4 \iff x > 4.$$
$$x+1 < 0,\ x-4 < 0 \iff x < -1,\ x < 4 \iff x < -1.$$

En consecuencia, el conjunto de números reales pedido es $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

[2] Una generalización de este resultado puede verse en el problema 553.

Problemas propuestos

13

Sean a y b números racionales con $b > a$. Demostrar que $a + \sqrt{2}(b-a)/2$ es un número irracional comprendido entre a y b.

14

Sean a, b y x números reales, con $0 < a < b$ y $0 < x$. Ordenar de menor a mayor

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+x}{b+x}, \quad \frac{a+2x}{b+2x}.$$

15

Sean a y b números reales, con $a < b$, y sea $c = (2a+3b)/5$. Demostrar:

1) $a < c < b$.
2) $|b-c| < |a-c|$ (es decir, c está más cerca de b que de a).

16

Sean a y b números reales. Demostrar:

1) $\text{máx } \{a, b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.
2) $\text{mín } \{a, b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

17

Resolver la inecuación $\left|\dfrac{x}{x-2}\right| > 10$.

18

Consideremos el polinomio

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 5.$$

Calcular $f(1), f(-1)$ y $f(2)$.

19

Hallar las raíces enteras del polinomio

$$x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 19x - 30.$$

20

Hallar p y q para que las raíces de la ecuación $x^2 + px + q$ sean p y q.

21

Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^6 - x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 26x^2 + 47x - 34, \\ g(x) &= 2x^3 - x^2 + 3x - 5, \end{aligned}$$

Calcular:

1) $f(x) + g(x)$. 2) $f(x)g(x)$.
3) El cociente y el resto de dividir $f(x)$ por $g(x)$.

22

Sea $n \geq 0$ un entero. Demostrar que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Indicación: Desarrollar $2^n = (1+1)^n$ por el binomio de Newton.

23

Determinar, si existe, el ínfimo, el mínimo, el máximo y el supremo de cada uno de los siguientes conjuntos.

1) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.
2) $[-2, 3)$.
3) $\{x : |x-5| < 3\}$.
4) $\{x : |x+3| \leq 2$.
5) $\{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.
6) $\{1/p^2 : p$ es un entero primo$\}$.

Problemas propuestos

Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

24

$$\frac{(i-1)(2i+1)}{3-4i}.$$

2 Funciones

Resumen teórico

Funciones reales de una variable real

Una función real de variable real es una aplicación $f: D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$ denominado *dominio* de f. La función f hace corresponder a cada elemento $x \in D$ exactamente un elemento $y \in \mathbb{R}$, el cual se denota por $y = f(x)$; en este caso, se dice que y es *la imagen* de x y que x es *una antiimagen* de y. El conjunto de imágenes se denota por $f(D)$ y se denomina *recorrido* o la *imagen* de f. El conjunto de puntos del plano $(x, f(x))$, con $x \in D$, se denomina *gráfica* de f.

Con frecuencia, una función se define mediante una expresión que permite calcular la imagen que corresponde a cada elemento, pero sin explicitar el dominio. En este caso, se sobreentiende que el dominio es el conjunto de números para los que la expresión dada tiene sentido, es decir, el conjunto de números para los que es posible calcular la imagen.

Una función $f: D \to \mathbb{R}$ es *inyectiva* si cada par de elementos diferentes de D tienen imágenes diferentes; equivalentemente, si para cada $x_1, x_2 \in D$, la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. En este caso, existe una función f^{-1} de dominio $f(D)$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in D$. Esta función se denomina *inversa* de f, y su gráfica es simétrica de la de f respecto a la recta $y = x$.

Supongamos que $D \subseteq \mathbb{R}$ cumple que $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$. Una función f de dominio D es *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$ y es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas, y la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función f de dominio D es *periódica* de *periodo* $p \in \mathbb{R}$ si para cada $x \in D$ se cumple que $x + p \in D$ y $f(x + p) = f(x)$. Si se conoce la gráfica de una función f de periodo p en un intervalo $[a, a + p)$, entonces la gráfica de f se obtiene de la gráfica en el intervalo repitiéndola en cada intervalo $[a + kp, a + (k + 1)p)$, $k \in \mathbb{Z}$.

La *suma* $f + g$ y el *producto* fg de dos funciones f y g sólo están definidos si los dominios de f y de g tienen intersección no vacía. En este caso, se definen por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

para todo x en la intersección de los dominios de f y g. Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ y consideremos todas las funciones de dominio D. En este conjunto, la suma de funciones es asociativa y conmutativa; la función $e(x) = 0$ para todo $x \in D$ es el elemento neutro; toda función f tiene opuesta $-f$, definida mediante $(-f)(x) = -f(x)$

para todo $x \in D$. El producto también es asociativo y conmutativo, así como distributivo respecto a la suma; la función $f(x) = 1$ para todo $x \in D$ es el elemento neutro. Así, pues, el conjunto de las funciones de dominio D con la suma y el producto forman un anillo conmutativo. Nótese que sólo tienen inversa respecto al producto aquellas funciones f tales que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in D$; en este caso, la inversa está definida por $(1/f)(x) = 1/f(x)$ para todo $x \in D$.

Sea f una función de dominio D y g una función cuyo dominio contiene el recorrido $f(D)$ de f. La *composición* de f y g es la función $g \circ f$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in D$. Esta operación es asociativa en el sentido que si f, g y h son funciones tales que existe una de las funciones $(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$, entonces existe la otra y son iguales. La composición no es conmutativa. Existe un elemento neutro, que es la función *identitad*, definida por $I(x) = x$ para todo x; en efecto, para toda función f se cumple $f \circ I = I \circ f = f$. Las funciones inyectivas tienen inversa respecto a esta operación: la inversa de una función f es la función f^{-1} definida anteriormente, y se tiene $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$ para todo x.

■ Sea f una función de dominio D y $A \subseteq D$. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq k$ para todo $x \in A$, se dice que k es una *cota superior* de f en A, y que f está *acotada superiormente* en A; en ese caso, la menor de las cotas superiores de A se denomina *supremo* de f en A. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq f(x)$ para todo $x \in A$, se dice que k es una *cota inferior de f en A* y que f está *acotada inferiormente* en A; en ese caso, la mayor de las cotas inferiores de A se denomina *ínfimo* de f en A. Si f está acotada superior e inferiormente en A, se dice que f está *acotada* en A. Si no se explicita el conjunto A, entonces se sobreentiende que es todo el dominio.

Límites

□ Sea f una función de dominio D y a un número real tal que todos los entornos de a tengan puntos de D distintos de a.

El *límite* de f en a es el número real ℓ si para cada entorno $(\ell-\epsilon, \ell+\epsilon)$ de ℓ existe un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ de a tal que todos los puntos $x \in D \cap (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, tienen la imagen en $(\ell-\epsilon, \ell+\epsilon)$. Equivalentemente, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

significa que el límite de f en a existe y que es ℓ.

El *límite* de f en a es $+\infty$, y se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, si para cada $K > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

El *límite* de f en a es $-\infty$, y se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, si para cada $K < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < K.$$

Sea f una función de dominio D y a un número real tal que todos sus semientornos derechos (resp. izquierdos) tengan puntos de D. El *límite por la derecha* (resp. *izquierda*) de f en a es ℓ, y se escribe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$), si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < x - a < \delta \text{ (resp } 0 < a - x < \delta) \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

De manera análoga se definen los cuatro límites $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Sea f una función tal que todo entorno de $+\infty$ tenga puntos de D. El límite de f en $+\infty$ es ℓ, y se denota $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $x \in D$ y $K < x$ implica $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Análogamente se definen los límites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Podemos enunciar una única definición que englobe todas las anteriores. Para ello, además de los entornos de $\pm\infty$ y de un número real a, definamos un *entorno de* a^+ como un semientorno derecho de a y un *entorno de* a^- como un semientorno izquierdo de a. Con esto, todas las definiciones anteriores responden al mismo esquema: sea $\triangle \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ y $\square \in \{\ell, +\infty, -\infty\}$. Sea f una función de dominio D tal que todo entorno de $\triangle$ tenga puntos de D distintos de $\triangle$. Entonces

$$\lim_{x\to\triangle} f(x) = \square$$

si para cada entorno de V de $\square$ existe un entorno U de $\triangle$ tal que $x \in D \cap U$ y $x \neq \triangle$ implica $f(x) \in V$.

Enunciaremos ahora propiedades de los límites, pero debemos hacer dos observaciones previas. La primera es que algunas de las propiedades involucran operaciones con dos límites. Si los dos límites son números reales, el significado de la operación es claro, pero si uno de ellos o los dos son $+\infty$ o $-\infty$, entonces debe entenderse lo siguiente (con las propiedades conmutativas de la suma y el producto sobreentendidas):

- $(+\infty) + \ell = +\infty$; $\quad (-\infty) + \ell = -\infty$.
  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty)\cdot\ell = +\infty$ y $(-\infty)\cdot\ell = -\infty$;
  si $\ell < 0$, $\quad (+\infty)\cdot\ell = -\infty$ y $(-\infty)\cdot\ell = +\infty$;
  $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $\quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$; $\quad (-\infty)(-\infty) = +\infty$.
- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty)^{\ell} = +\infty$;
  si $\ell < 0$, $\quad (+\infty)^{\ell} = 0$;
  si $1 < \ell$, $\quad \ell^{+\infty} = +\infty$ y $\ell^{-\infty} = 0$;
  si $0 < \ell < 1$, $\quad \ell^{+\infty} = 0$ y $\ell^{-\infty} = +\infty$;
  $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$.

La segunda observación es que numerosas propiedades admiten múltiples versiones, dependiendo de donde se toman los límites y de los valores de estos límites. Por razón de brevedad, adoptaremos ciertos convenios de notación. Las letras a, ℓ, r y s representarán números reales; $\triangle$ representará un elemento del conjunto $\{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$, es decir, uno de los valores en los que se toma el límite, y $\square$ un elemento de $\{\ell, +\infty, -\infty\}$, es decir, uno de los valores que puede tener el límite.

El comportamiento de los límites respecto a las operaciones con funciones se describe en las siguientes propiedades:

– Si existe el límite de f en $\triangle$, entonces este límite es único.

– Si existen los dos límites laterales de f en a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell.$$

3 Sucesiones

Resumen teórico

Sucesiones

Usualmente se define una sucesión (de números reales) como una aplicación $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; la imagen de un natural n se denota a_n y se denomina término n-ésimo de la sucesión. La sucesión a se denota también por (a_n).

La definición anterior implica que aplicaciones como las definidas por

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 - 13n + 40}, \qquad b_n = \ln(n-5), \qquad c_n = \frac{2n}{n-(-1)^n n},$$

no son sucesiones: en los tres casos, el dominio no es $\mathbb{N}$, sino

$$\mathbb{N} \setminus \{5,7\}, \qquad \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4,5\}, \qquad \mathbb{N} \setminus \{2k \ : \ k \in \mathbb{N}\}, \tag{3.1}$$

respectivamente. Para no excluir casos como los anteriores y que la definición esté acorde con la práctica habitual en los problemas, aquí daremos una definición de sucesión algo más general: en lugar de $\mathbb{N}$, el dominio puede ser cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Una *sucesión* (de números reales) es una aplicación $a\colon D \to \mathbb{R}$ cuyo dominio D es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. La imagen de un natural n del dominio se denota a_n (en lugar de $a(n)$, como es habitual en las aplicaciones) y se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. La sucesión a se denota también mediante (a_n). En lo sucesivo, la condición de que n pertenezca al dominio de una sucesión a cuando se describen propiedades de los términos a_n de la misma quedará sobreentendida (de modo análogo a que escribir $f(x)$ para una función f presupone que x pertenece al dominio de f).

La forma más usual de definir una sucesión (a_n) consiste en dar explícitamente la imagen de cada natural n del dominio (por ejemplo, $a_n = n^2 - 3$). Sin embargo, en ciertos contextos (por ejemplo, en el cálculo de la complejidad de los algoritmos), la forma natural en que aparecen las sucesiones es la *recurrente*, que consiste en dar los primeros términos $a_0, \ldots, a_{k-1}$ y una relación que, para $n \geq k$, permita calcular a_n a partir de los k términos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$. Por ejemplo, una *progresión aritmética* es una sucesión en que cada término se obtiene del anterior sumando un número real fijo d denominado *diferencia*. En este caso, tenemos una sucesión definida mediante un primer término a_1 y la recurrencia $a_n = a_{n-1} + d$ para $n \geq 2$.

Cotas

Sea (a_n) una sucesión. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \le k$ para todo n, se dice que k es una *cota superior* de (a_n) y que (a_n) está *acotada superiormente*; en ese caso, la menor de las cotas superiores se denomina *supremo* de (a_n). Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \le a_n$ para todo n, se dice que k es una *cota inferior* de (a_n) y que (a_n) está acotada inferiormente; en ese caso, la mayor de las cotas inferiores se denomina *ínfimo* de (a_n). Si (a_n) está acotada superior e inferiormente, se dice que (a_n) está *acotada*.

Límites

El *límite* de una sucesión (a_n) es

- el número real ℓ si para cada real $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que $|a_n - \ell| < \epsilon$ para todo $n \ge N$.
- $+\infty$ si para cada número real $M > 0$ existe un natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \ge N$.
- $-\infty$ si para cada número real $M < 0$ existe un natural N tal que $a_n < M$ para todo $n \ge N$.

Las notaciones

$$\lim_n a_n = \ell, \qquad \lim_n a_n = +\infty, \qquad \lim_n a_n = -\infty$$

indican, respectivamente, que el límite de (a_n) es el número real ℓ, $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. Si el límite de (a_n) es un número real ℓ, se dice que la sucesión es *convergente* y que *converge* hacia ℓ; si es $\pm\infty$, se dice que es *divergente*. Una sucesión que no es convergente ni divergente se denomina *oscilante*. Determinar el *carácter* de una sucesión es averiguar si es convergente, divergente u oscilante.

Una primera propiedad de las sucesiones convergentes es que son sucesiones acotadas. El recíproco no es cierto, como prueba, por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$, que es acotada pero no convergente.

Como en el caso de las funciones, las tres definiciones de límite pueden englobarse en una. Sea $\square \in \{\ell, +\infty, -\infty\}$ y (a_n) una sucesión de dominio D. El límite de (a_n) es $\square$ si, para cada entorno U de $\square$, existe un entorno $(N, +\infty)$ de $+\infty$ tal que, si $n \in (N, +\infty) \cap D$, entonces $a_n \in U$.

La similitud de los límites de sucesiones con los de funciones en $+\infty$ se refuerza con la siguiente propiedad.

- Sea $f(x)$ una función tal que existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y definamos la sucesión (a_n) por $a_n = f(n)$. Entonces, la sucesión (a_n) tiene límite y $\lim_n a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Los problemas 124 y 137 son ejemplos de aplicación de la propiedad anterior.

Como en el caso de los límites de funciones, algunas propiedades involucran operaciones con dos límites. Si los dos límites son números reales, el significado de la operación es claro, pero si uno de ellos o los dos son $+\infty$ o $-\infty$, entonces debe entenderse lo siguiente (con las propiedades conmutativas de la suma y el producto sobreentendidas):

- $(+\infty) + \ell = +\infty$; $\quad (-\infty) + \ell = -\infty$.
  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty) \cdot \ell = +\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = -\infty$;
  si $\ell < 0$, $\quad (+\infty) \cdot \ell = -\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = +\infty$;
  $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $\quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$; $\quad (-\infty)(-\infty) = +\infty$;

124

Sea $k \geq 1$ un natural y $a_0, \ldots a_k$ números reales, con $a_k \neq 0$. Calcular

$$\lim_n \; (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0).$$

[Solución]

$$\begin{aligned}\lim_n \; (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0) &= \lim_n \; \left(n^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k}\right)\right)\\ &= \lim_n \; a_k n^k\\ &= \begin{cases} -\infty \text{ si } a_k < 0, \\ +\infty \text{ si } a_k > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos considerar la función polinómica $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0$. La sucesión de la que se quiere calcular el límite es $s_n = f(n)$. Entonces (v. página 38)

$$\lim \; s_n = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a_k < 0, \\ +\infty \text{ si } a_k > 0. \end{cases}$$

125

Calcular $\lim_n \left(n^2 \cdot \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{3n^5 + 10}\right)$.

[Solución]

$$\begin{aligned}\lim_n \left(n^2 \cdot \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{3n^5 + 10}\right) &= \lim_n \left(n^2 \cdot \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1)}{3n^5 + 10}\right)\\ &= \lim_n \frac{n^2(8n^3 + 8n)}{3n^5 + 10}\\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

126

Calcular $\lim_n \dfrac{\sqrt{3}n^2 + \sqrt{2}n + n}{-\sqrt{2}n^2 + 5n + 2}$.

[Solución]

Dividimos numerador y denominador por n^2 y obtenemos

$$\lim_n \frac{\sqrt{3}n^2 + \sqrt{2}n + n}{-\sqrt{2}n^2 + 5n + 2} = \lim_n \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}/n + 1/n}{-\sqrt{2} + 5/n + 2/n^2} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{3/2}.$$

127

Calcular $\lim\limits_{n} \dfrac{e^n + 3^n}{e^n - 3^n}$.

[Solución]

Como $2 < e < 3$, tenemos $0 < e/3 < 1$. Por tanto, $\lim\limits_{n} (e/3)^n = 0$. Entonces, dividiendo numerador y denominador por 3^n, resulta

$$\lim_{n} \frac{e^n + 3^n}{e^n - 3^n} = \lim_{n} \frac{(e/3)^n + 1}{(e/3)^n - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

128

Calcular $\lim\limits_{n} \dfrac{2^n \cdot 3^n + 5^{n+1}}{(2^n + 1)(3^{n-1} - 1)}$.

[Solución]

Dividiendo numerador y denominador por $2^n \cdot 3^n$ y teniendo en cuenta que si $0 < a < 1$ entonces $\lim\limits_{n} a^n = 0$, resulta

$$\lim_{n} \frac{2^n \cdot 3^n + 5^{n+1}}{(2^n + 1)(3^{n-1} - 1)} = \lim_{n} \frac{1 + 5 \cdot (5/6)^n}{(1 + 1/2^n)(1/3 - 1/3^n)} = \frac{1}{1/3} = 3.$$

129

Calcular $\lim\limits_{n} \left(\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d}\right)$, donde a, b, c y d son números reales.

[Solución]

Multiplicando y dividiendo la expresión del término general por

$$\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n} \left(\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d}\right) &= \lim_{n} \frac{n^2 + an + b - n^2 - cn - d}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} \\
&= \lim_{n} \frac{(a-c)n + (b-d)}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} \\
&= \lim_{n} \frac{(a-c) + (b-d)/n}{\sqrt{1 + a/n + b/n^2} + \sqrt{1 + c/n + d/n^2}} \\
&= \frac{a-c}{1+1} = \frac{a-c}{2}.
\end{aligned}$$

197

Sea a un número real positivo. Calcular el límite de la sucesión definida por

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n2^{a_n}}.$$

198

Sean a y b números reales, con $0 < a < b$. Definimos dos sucesiones (a_n) y (b_n) por

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \qquad b_1 = \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right), \; b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(a_{n+1} es la media armónica de a_n y b_n, y b_n es la media aritmética de a_n y b_n). Demostrar:

1) $a < a_1 < b_1 < b$.

2) $a_n < b_n$, para todo n.

3) (a_n) es monotóna creciente.

4) (b_n) es monótona decreciente.

5) (a_n) y (b_n) están acotadas.

6) (a_n) y (b_n) son convergentes.

199

Sea (a_n) una sucesión acotada. Para cada natural n, sea $b_n = \sup\{a_m \;:\; m \geq n\}$. Demostrar que la sucesión (b_n) es convergente.

Indicación: Demostrar que (b_n) es acotada y monótona decreciente.

200

Hallar los límites de oscilación y los límites superior e inferior de la sucesión

$$a_n = \frac{n^3 - n^2 + 2}{n^3 + n^2 + 5} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + (1 + (-1)^n) \cos n\pi.$$

4 Primitivas

Resumen teórico

Primitivas

Sea $f(x)$ una función definida en un dominio D. El problema que abordamos en este capítulo es determinar las funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in D$. Una tal función $F(x)$ se denomina una *primitiva* de $f(x)$ en D. La igualdad $F'(x) = f(x)$ puede verse como una ecuación en la que $f(x)$ es un dato y la función $F(x)$ la incógnita. Ciertamente, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en D, entonces, para toda constante K, la función $G(x) = F(x) + K$ también es una primitiva de $f(x)$ en D, pues, en efecto, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Sin embargo, no es cierto, en general, que dos primitivas de una función $f(x)$ difieran en una constante, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Considérese la función $f(x) = 1/x$ cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se compueba fácilmente que las funciones

$$F_1(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad F_2(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

son dos primitivas de $f(x) = 1/x$. Nótese, sin embargo, que $F_1 - F_2$ *no* es constante, ya que $F_1(x) - F_2(x)$ vale -1 si $x < 0$ y vale 1 si $x > 0$.

En el ejemplo anterior, vemos que las dos primitivas $F_1(x)$ y $F_2(x)$ de la función $f(x)$ difieren en una constante *en cada intervalo* contenido en el dominio, pero que la constante puede ser distinta en intervalos distintos. Ahora bien, como consecuencia del teorema del valor medio, dos primitivas de una función *en un intervalo* sí difieren en una constante.

Si F es una primitiva de f, se escribe

$$\int f = F + K \quad \text{o} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + K$$

y se entiende que el conjunto de primitivas de f en un cierto intervalo es el conjunto de funciones de la forma $x \mapsto F(x) + K$, con K constante. La expresión anterior también se lee *la integral (indefinida) de $f(x)$ es $F(x) + K$*.

De las propiedades de las derivadas se deduce inmediatamente que si α y β son números reales y f y g funciones con primitivas, entonces

$$\alpha \int f + \beta \int g = \int (\alpha f + \beta g).$$

Integrales inmediatas

Sea u una función derivable. Las reglas de derivación proporcionan las siguientes reglas de integración inmediata.

$$\int u^r u' \, dx = \frac{u^{r+1}}{r+1} + K \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{u'}{u} \, dx = \ln |u| + K$$

$$\int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + K \quad (a > 0) \qquad \int u' e^u \, dx = e^u + K$$

$$\int u' \cos u \, dx = \operatorname{sen} u + K \qquad \int u' \operatorname{sen} u \, dx = -\cos u + K$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen} u} \, dx = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + K \qquad \int \frac{u'}{\cos^2 u} \, dx = \tan u + K$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} \, dx = -\cot u + K \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + K$$

$$\int \frac{u'}{a^2 + u^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + K$$

$$\int u' \operatorname{senh} u \, dx = \cosh u + K \qquad \int u' \cosh u \, dx = \operatorname{senh} u + K$$

$$\int \frac{u'}{\cosh^2 u} \, dx = \tanh u + K \qquad \int \frac{u'}{\operatorname{senh}^2 u} \, dx = \coth u + K$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 - a^2}} \, dx = \operatorname{arg\,cosh} \frac{u}{a} + K \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{u^2 + a^2}} \, dx = \operatorname{arg\,senh} \frac{u}{a} + K$$

$$\int \frac{u'}{a^2 - u^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arg\,tanh} \frac{u}{a} + K$$

Cambio de variable

Supongamos que se desea calcular una primitiva $F(x)$ de $f(x)$. Si componemos F con una nueva función g derivable e inyectiva, por la regla de la cadena, tenemos

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

261

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx.$$

262

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}.$$

263

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\,dx.$$

264

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx.$$

265

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\,dx.$$

266

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx.$$

267

$$\int \cos^5 x\,dx.$$

268

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x\,dx.$$

269

$$\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 5x\,dx.$$

270

$$\int \cos 10x \cos 3x\,dx.$$

271

$$\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}\,dx.$$

272

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

273

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

274

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx.$$

275

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx.$$

276

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx.$$

277

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$$

278

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

279

$$\int \frac{dx}{x[(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2]}.$$

280

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$$

5 Integración

Resumen teórico

La integral de Riemann

De antiguo, es sabido que el procedimiento para calcular las áreas de los polígonos (regulares o no, convexos o no) consiste básicamente en triangularlos. El problema del área fue, desde el inicio, cómo calcularla para superficies no poligonales. Desde el siglo XVII hasta el XIX, el concepto de área se daba por supuesto y el cálculo de integrales se veía como un método para calcular áreas. A principios del siglo XIX, Agustin Cauchy dio un vuelco a este punto de vista definiendo el área como la integral. El problema pasó a ser qué superficies tienen área, es decir, qué funciones son integrables. La identificación de la integral con el área no es del todo ajustada, en el sentido de que un área es en todo caso no negativa, mientras que la integral de una función puede ser negativa.

Aparte de los polígonos, una figura plana elemental con un lado curvo es la limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ (con $a < b$), y por la gráfica de una función $y = f(x)$. Las funciones que vamos a considerar inicialmente son las funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$, pero, como veremos, no todas las funciones acotadas en un intervalo son integrables.

Sean $a < b$ dos números reales y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La discusión siguiente va encaminada a definir cuándo la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es un conjunto ordenado $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ se denomina *i-ésimo subintervalo* de la partición. Puesto que la función f está acotada en $[a, b]$, también está acotada en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por lo que tiene ínfimo m_i y supremo M_i en dicho subintervalo. Definimos la *suma inferior* y la *suma superior* de f en $[a, b]$ respecto de la partición P por

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Si f es continua y positiva, la suma inferior corresponde a la suma de las áreas de n rectángulos que aproxima por defecto el área que se quiere definir; análogamente, la suma superior la aproxima por exceso (v. figura 5.1).

Puede demostrarse la siguiente propiedad: si f es una función acotada en $[a, b]$, y P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces,

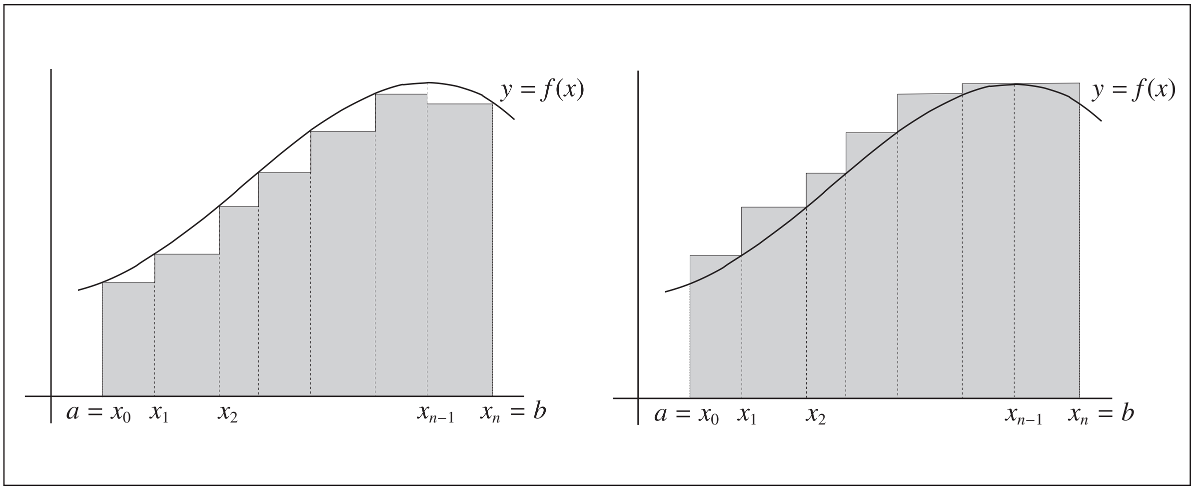

Fig. 5.1

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Ello implica que el conjunto $\{s(f, P) : P$ es una partición de $[a, b]\}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior. Por tanto, tiene supremo, que se denomina *integral inferior de* f *en* $[a, b]$ y se denota

$$\underline{\int_a^b} f.$$

Análogamente, el conjunto $\{S(f, P) : P$ es una partición de $[a, b]$ $\}$ está acotado inferiormente por cualquier suma inferior. Por tanto, tiene ínfimo, que se denomina *integral superior de* f *en* $[a, b]$ y se denota

$$\overline{\int_a^b} f.$$

Una función acotada f definida en $[a, b]$ es *integrable Riemann* (o, simplemente, *integrable*) en $[a, b]$ si las integrales inferior y superior de f en $[a, b]$ coinciden. Este número común se denomina *integral de* f *en* $[a, b]$[7], y se denota por cualquiera de los dos símbolos

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

La definición de función integrable en un intervalo $[a, b]$ se extiende a los casos $b < a$ y $b = a$ como sigue. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces definimos

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

[7] La expresión *integral definida de* $f(x)$ *entre* a *y* b también se utiliza con frecuencia.

Si a es un punto del dominio de f, entonces definimos

$$\int_a^a f = 0.$$

Ejemplos

1) Consideremos una función constante $f(x) = h > 0$ definida en un intervalo $[a,b]$. Se trata de una función acotada. Para toda partición $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$, el ínfimo y el supremo de f en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ son $m_i = M_i = h$, así que todas las sumas inferiores y superiores coinciden con el número

$$\sum_{i=1}^{n} h(x_i - x_{i-1}) = h \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = h(b-a),$$

por lo que f es integrable y su integral es $h(b-a)$, que es el área del rectángulo de base $b-a$ y altura h, como cabía esperar.

2) Consideremos ahora la función f definida en un intervalo $[a,b]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Claramente, se trata de una función acotada. Sea $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. En cualquier subintervalo $[x_i, x_{i-1}]$ hay números racionales y números irracionales, por lo que el ínfimo en todo subintervalo es $m_i = 0$ y el supremo es $M_i = 1$. Entonces,

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

Por tanto, todas las sumas inferiores son 0 y la integral inferior es 0, mientras que todas las sumas superiores son $b-a$ y la integral superior es $b-a > 0$. Así, la función f no es integrable en $[a,b]$.

Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición de un intervalo $[a,b]$. El diámetro de P, denotado $\delta(P)$, es la mayor de las longitudes de los subintervalos:

$$\delta(P) = \text{máx } \{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}.$$

Se cumple la siguiente propiedad.

- Sea f una función integrable en $[a,b]$ y sea P_n una sucesión de particiones de $[a,b]$, con $\lim_n \delta(P_n) = 0$. Sea $\ell(i,n)$ la longitud del i-ésimo intervalo de la partición P_n y $t(i,n)$ un punto de ese subintervalo. Entonces,

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} f(t(i,n))\ell(i,n) = \int_a^b f.$$

Esta propiedad se utiliza a veces para calcular límites de sucesiones (a_n) tales que, para alguna función integrable f y alguna sucesión de particiones (P_n) adecuadas, pueden ponerse en la forma

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} f(t(i,n))\ell(i,n),$$

que a veces se denomina *suma de Riemann*. A menudo, la sucesión (P_n) está formada por particiones con todos los intervalos de la misma longitud, de forma que $\ell(i,n) = (b-a)/n$ (v. problemas 288 y 289).

Criterios de integrabilidad

- Sea f una función acotada en $[a,b]$. Entonces, f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

- Sea f una función acotada en $[a,b]$ y, para cada natural n, consideremos la partición P_n de $[a,b]$ con n subintervalos de la misma longitud $(b-a)/n$. Si

$$\lim_n \, (S(f,P_n) - s(f,P_n)) = 0$$

  entonces f es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f = \lim_n \, s(f,P_n) = \lim_n \, S(f,P_n).$$

- Toda función acotada monótona en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ (v. problema 290).
- Toda función continua en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.
- Toda función acotada que tenga un número finito o numerable de discontinuidades en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.[8]

Propiedades de la integral

- (Linealidad) Si f y g son integrables en $[a,b]$ y α, β son dos números reales arbitrarios, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a,b]$, y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \int_a^b \alpha f + \int_a^b \beta g.$$

- Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces fg es integrable en $[a,b]$ (sin embargo, no es cierto, en general, que la integral del producto sea igual al producto de las integrales).
- Si f y g son integrables en $[a,b]$ y f/g está definida en $[a,b]$ y es acotada, entonces f/g es integrable en $[a,b]$ (pero no es cierto, en general, que la integral del cociente sea igual al cociente de las integrales).

[8] En realidad, la propiedad más general de este tipo es la siguiente: una función f acotada en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, el conjunto D de puntos de discontinuidad de f tiene la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos $[a_0,b_0], [a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n], \ldots$ tal que la reunión de todos ellos contiene D y $\sum_{n=0}^{\infty}(b_i - a_i) < \varepsilon$. Para ver el significado de esta suma infinita, consúltese el capítulo 6. A efectos prácticos, sin embargo, las propiedades enunciadas en el texto son generalmente suficientes.

6 Series numéricas

Resumen teórico

Series

Una *serie* de números reales es un par de sucesiones $((a_n),(s_n))$ tales que $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ para todo natural n; la sucesión (a_n) se denomina sucesión de *términos* de la serie y (s_n) sucesión de *sumas parciales*. La serie $((a_n),(s_n))$ se denota por alguno de los símbolos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n\geq 1} a_n, \quad \sum_{n} a_n.$$

Si $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, entonces se escribe

$$s = \sum_{n\geq 1} a_n$$

y s se denomina *suma de la serie*. Observemos que hay un cierto grado de inconsistencia en el hecho de utilizar el mismo símbolo para denotar la serie y su suma; sin embargo, en cada caso el contexto aclara –o debería aclarar– el significado que debe tener el símbolo.

Una serie es *convergente, divergente u oscilante* según que su sucesión de sumas parciales sea convergente, divergente u oscilante. Si $\sum_n a_n$ es una serie de términos no negativos ($a_n \geq 0$ para todo n), entonces la sucesión de sumas parciales (s_n) es creciente y, por tanto, la serie sólo puede ser convergente o divergente, pero no oscilante.

Determinar el carácter de una serie es averiguar si es convergente, divergente u oscilante. El carácter de una serie no se modifica si se cambian un número finito de términos de la serie, pero la suma de la serie sí puede cambiar.

Una primera condición necesaria para la convergencia de una serie es la siguiente:

- Si la serie $\sum_n a_n$ es convergente, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Sin embargo, esta condición no es suficiente, pues la *serie armónica* $\sum_n 1/n$ es divergente (v. problema 363) aunque la sucesión de sus términos tiene límite 0.

La *suma* de dos series y el producto de una serie por un escalar se definen de forma natural:

$$\sum_n a_n + \sum_n b_n = \sum_n (a_n + b_n), \qquad \alpha \sum_n a_n = \sum_n (\alpha a_n).$$

La suma de dos series consiste en sumar las sucesiones de términos y sumar las sucesiones de sumas parciales; el producto de una serie por un número real α consiste en multiplicar por α la sucesión de términos y multiplicar por α la sucesión de sumas parciales. Las propiedades de estas operaciones son exactamente las mismas que las de las operaciones correspondientes con sucesiones.

El comportamiento de la suma de series respecto a estas operaciones también es análogo al de las sucesiones, como explicitamos a continuación. En los enunciados siguientes, cuando A o B son $\pm\infty$, sobreentendemos los mismos convenios respecto al significado de $A + B$ que hemos establecido con los límites de sucesiones en la página 84.

- Si $\sum_n a_n = A$ y $\sum_n b_n = B$, con $A, B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_n a_n + \sum_n b_n = A + B, \qquad \text{y} \qquad \alpha \sum_n a_n = \alpha A.$$

Determinar el carácter de una serie no es siempre inmediato y menos aún calcular su suma. Ciertas series geométricas proporcionan ejemplos sencillos pero importantes de series para las que es posible calcular su suma. Una *serie geométrica* es una serie de la forma $\sum_n ar^n$, con $a \neq 0$ y $r \in \mathbb{R}$. El número r se denomina *razón* de la serie y de él depende esencialmente el carácter de la serie, como se describe a continuación.

Series geométricas. Sean $a \neq 0$ y r números reales. Entonces:

- La serie $\sum_n ar^n$ es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. En este caso, su suma es

$$\sum_{n\geq 0} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

- Si $|r| > 1$ o $r = 1$, entonces la serie $\sum_n ar^n$ es divergente.
- Si $r = -1$, entonces la serie $\sum_n ar^n$ es oscilante.

Una serie $\sum_n a_n$ es *telescópica* si existe una sucesión (b_n) tal que $a_n = \pm(b_{n+1} - b_n)$ para todo n. Para las series telescópicas, tenemos el resultado siguiente.

Series telescópicas. Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie telescópica, con $a_n = \pm(b_{n+1} - b_n)$ para todo n. Si la sucesión (b_n) es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \pm\left(-b_1 + \lim_n \, b_n\right).$$

Otra propiedad que permite a veces calcular la suma de una serie es la siguiente.

Propiedad asociativa. Sea (a_n) una sucesión y (k_n) una sucesión de números naturales estrictamente creciente. Definamos la sucesión (b_n) por

$$b_1 = a_1 + \cdots + a_{k_1}, \quad b_2 = a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}, \quad \ldots \quad b_n = a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}, \ldots$$

Si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ tiene suma $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ tiene también suma s.

Más informalmente, la propiedad anterior asegura que, si una serie $\sum_n a_n$ tiene suma $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, entonces la serie $\sum_n b_n$ obtenida agrupando términos de la serie $\sum_n a_n$ tiene la misma suma s.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Las series $\sum_n a_n$, con $a_n \geq 0$ para todo n, se denominan *series de términos positivos* (aunque se permite que haya términos iguales a cero). Los siguientes criterios se enuncian para series de términos positivos; sin embargo, como ya se ha observado, el carácter de una serie no depende de los primeros términos, así que puede entenderse que $a_n \geq 0$ para todo n a partir de algún natural k. Por otra parte, los mismos criterios son también válidos para las series en las que $a_n \leq 0$ para todo n a partir de algún k, ya que $\sum_n (-a_n)$ es convergente si, y sólo si, $-\sum_n a_n$ lo es.

Criterio de comparación ordinaria. Si $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n, entonces:

- $\sum_n b_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ convergente.
- $\sum_n a_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ divergente.

Criterio de comparación en el límite. Si $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para todo n y existe el límite

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L,$$

entonces

- si $0 < L < +\infty$, las dos series $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ tienen el mismo carácter;
- si $L = 0$ y $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge;
- si $L = +\infty$ y $\sum_n b_n$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Criterio del cociente. Si $a_n > 0$ para todo n y existe $\lim_n \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ entonces

- $L < 1$ implica que $\sum_n a_n$ es convergente;
- $L > 1$ implica que $\sum_n a_n$ es divergente.

Criterio de la raíz. Si $a_n \geq 0$ para todo n y existe $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, entonces

- $L < 1$ implica que $\sum_n a_n$ es convergente;
- $L > 1$ implica que $\sum_n a_n$ es divergente.

Criterio de Raabe. Si $a_n > 0$ para todo n y $\lim_n n\left(1 - \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, entonces

- $L > 1$ implica que $\sum_n a_n$ es convergente;
- $L < 1$ implica que $\sum_n a_n$ es divergente.

7 Polinomios de Taylor, series de potencias y series de Taylor

Resumen teórico

El polinomio de Taylor

Un recurso para estudiar el comportamiento de una función en un entorno de un punto es aproximarla mediante alguna otra función fácil de evaluar, particularmente por un polinomio. En este apartado, se asocia a cada función suficientemente regular un polinomio que la aproxima.

Sea f una función n veces derivable en el punto a. El *polinomio de Taylor de grado n para f en a* es el polinomio

$$P_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La diferencia $R_n(f,a,x) = f(x) - P_n(f,a,x)$ se denomina *resto n-ésimo de Taylor* de la función f en el punto a.

Para que exista la derivada n-ésima de f en a, la función $f^{(n-1)}$ debe existir en un entorno U de a. Por tanto, la condición de que exista $f^{(n)}(a)$ puede sustituirse por las condiciones de que f sea $n-1$ veces derivable en un entorno U de a y n veces derivable en a.

Notemos que $y = P_1(f,a,x)$ es la ecuación de la *recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Se cumplen las dos propiedades siguientes.

- El valor del polinomio $P_n(f,a,x)$ y el de todas sus derivadas hasta orden n en el punto a coinciden con los de la función f en este punto; es decir,

$$P_n^{(i)}(f,a,a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0, \ldots, n.$$

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f(x) = P_n(f,a,x)$. Además, si por divisiones sucesivas por $x-a$ se obtienen los cocientes $q_i(x)$ y los restos $r_i(x)$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-a)q_1(x) + r_0,\\
q_1(x) &= (x-a)q_2(x) + r_1,\\
q_2(x) &= (x-a)q_3(x) + r_2,\\
\vdots\ &\quad \vdots\\
q_{n-1} &= (x-a)q_n + r_{n-1},
\end{aligned}$$

se cumple que

$$f(a) = r_0, \quad f'(a) = r_1, \quad \dots \quad \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = r_{n-1}, \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = q_n.$$

- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(f,a,x)}{(x-a)^n} = 0.$

El límite anterior puede interpretarse en el sentido de que la similitud entre $f(x)$ y $P_n(f,a,x)$ es más acusada cuanto mayor es el grado y cuanto más cerca esté x de a.

Una función f es un *infinitésimo* en el punto a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Sean f y g dos infinitésimos en a. El infinitésimo $f(x)$ es *de orden mayor* que el infinitésimo $g(x)$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Intuitivamente, esto significa que, cuando x tiende hacia a, la función $f(x)$ tiende a 0 mucho más rápidamente que $g(x)$; en cierto sentido, en las proximidades de a, la función $f(x)$ es despreciable frente a $g(x)$. La notación $o(g(x))$ representa una función de orden mayor que $g(x)$. En este capítulo, utilizaremos esencialmente la comparación con las funciones de la forma $x \mapsto (x-a)^n$ con n natural y, especialmente, en el caso $a = 0$. En ciertos contextos, no es importante precisar qué función $f(x)$ se está considerando, sino que únicamente importa que tenga la propiedad de que su cociente por $(x-a)^n$ tenga límite 0; esto es lo que se indica con la notación $o((x-a)^n)$.

Si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

y $0 \le r \le n$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^r f(x)}{(x-a)^{n+r}} = 0, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)/(x-a)^r}{(x-a)^{n-r}} = 0,$$

propiedades que pueden escribirse

$$(x-a)^r o((x-a)^n) = o((x-a)^{n+r}), \qquad \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^r} = o((x-a)^{n-r}).$$

Análogamente, puede probarse que

$$o((x-a)^r)\, o((x-a)^n) = o((x-a)^{n+r}).$$

Si una función f es n veces derivable en a, su resto n-ésimo de Taylor $R_n(f,a,x)$ es de orden mayor que $g(x) = (x-a)^n$, por lo que la función f puede escribirse $f(x) = P_n(f,a,x) + o((x-a)^n)$ o, más explícitamente,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

La fórmula anterior se conoce como *desarrollo de Taylor de grado n de la función f en en el punto a.*[9]

Describimos, a continuación, el comportamiento de los polinomios de Taylor respecto a las operaciones con funciones. Enunciamos los resultados en el punto 0. Los resultados correspondientes en un punto a se obtienen mediante el cambio de variable $x \mapsto t = x - a$.

Sean f y g dos funciones con derivadas n-ésimas en el punto 0 y sean $p = P_n(f, 0, x)$ y $q = P_n(g, 0, x)$ los correspondientes polinomios de Taylor de grado n. Entonces,

- Si α y β son números reales, el polinomio de Taylor de grado n de $\alpha f + \beta g$ en el punto 0 es $\alpha p + \beta q$.

- El polinomio de Taylor de grado n de $f \cdot g$ en el punto 0 es el polinomio obtenido de pq suprimiendo los términos de grado $> n$.

- Si $g(0) \neq 0$, el polinomio de Taylor de grado n de f/g en el punto 0 es el cociente de la división de p por q según potencias de x crecientes hasta el grado n incluido.

- Si F es una primitiva de f en un entorno de 0, el polinomio de Taylor de grado $n + 1$ de F en el punto 0 es la primitiva P de p tal que $P(0) = F(0)$.

- Si $f(0) = 0$, el polinomio de Taylor de grado n de $g \circ f$ en el punto 0 es el polinomio obtenido de $q \circ p$ suprimiendo los términos de grado $> n$.

A continuación, detallamos los desarrollos de Taylor de grado n en $a = 0$ de algunas funciones.

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $(1 + x)^\alpha = \dbinom{\alpha}{0} + \dbinom{\alpha}{1} x + \dbinom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$,

  donde α es un número real y, para todo entero $k \geq 0$,
  $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)}{k!}.$$

- $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
- $\operatorname{arc\,sen} x = x + \dfrac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

[9] En el caso particular $a = 0$, el desarrollo suele denominarse de *MacLaurin*, aunque en este texto nosotros no utilizaremos esta terminología.

487

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(n+1)(n+2)2^n}(x-5)^n.$$

488

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2n}.$$

489

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(x/2)^n}{2n+1}.$$

490

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{a^n+b^n}, \quad (a>b>0).$$

491

$$\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-n}}{n+1} x^n.$$

Hallar el dominio de convergencia y la suma de las siguientes series.

492

$$\sum_{n\geq 0} (2n^2-n+3)x^{n+1}.$$

493

$$\sum_{n\geq 0} (-3)^n \frac{n+3}{n+2} x^n.$$

494

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n(2n+1)x^{2n}.$$

495

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}x^n$.

1) Hallar su dominio de convergencia.
2) Hallar su función suma.
3) Sumar la serie numérica $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$.

496

Demostrar que, para todo real x,

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-2}}{n\,(2n)!}\, x^{2n}.$$

Indicación: Sea $F(x)$ el término de la izquierda. Tenemos $F'(x) = \operatorname{sen}^2 x/x$. Utilizar el desarrollo del problema 466 e integrar.

Desarrollar en serie de potencias centrada en el origen las siguientes funciones.

497

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-1}.$$

498

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-3x}}.$$

499

$$f(x) = \frac{5x^2+4x-17}{-x^3+7x+6}.$$

500

$$f(x) = \frac{x^4}{x^4+25}.$$

501

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}.$$

502

Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$.

1) Calcular la serie de Taylor de $f(x)$ en $x = 0$.

2) Calcular la serie de Taylor de la función

$$\int_0^x f(t)\,dt$$

en $x = 0$ y su radio de convergencia.

3) Calcular

$$\int_0^{3/4} f(t)\,dt$$

con un error inferior a $0{,}005$.

8 Funciones de varias variables

Resumen teórico

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^n$ se denominan *vectores* o *puntos*, dependiendo del contexto en que preferentemente se consideren. Recordemos que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones siguientes: si $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la *suma* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$, y el *producto* de λ por $\mathbf{u}$ es el vector $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. En este contexto, los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan *vectores* y los números reales, *escalares*. Si se quieren remarcar aspectos más geométricos, los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan *puntos* y sus componentes se suelen denominar *coordenadas*.

Dados un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, existe un único punto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ tal que $y_i - x_i = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, que es el punto de coordenadas $y_i = x_i + v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En estas condiciones, es natural utilizar las notaciones $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$; el par ordenado $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se denomina el *representante* de $\mathbf{v}$ de *origen* $\mathbf{x}$ y de *extremo* $\mathbf{y}$.

El *producto escalar* de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es el número real

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

y tiene las siguientes propiedades: para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y todo escalar λ, se cumplen

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;
- $(\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v})$.

La *norma* o *módulo* de un vector $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ es el número real

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y para todo escalar λ, se cumplen

- $||\mathbf{u}|| \geq 0$;
- $||\mathbf{u}|| = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$;

- $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{u}\|$;
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Un vector $\mathbf{v}$ es *unitario* si $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Suponemos conocido el concepto de *ángulo* que forman dos vectores. Señalemos que, si α es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha.$$

Topología de $\mathbb{R}^n$

La *distancia* entre dos puntos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, denotada por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es la norma del vector $\mathbf{y} - \mathbf{x}$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Para cualesquiera puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, se cumplen las propiedades siguientes:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdad triangular).

Dados un punto $\mathbf{a}$ y un número real $r > 0$, se define la *bola* de *centro* $\mathbf{a}$ y *radio* r, denotada por $\mathscr{B}_r(\mathbf{a})$, como el conjunto de puntos cuya distancia a $\mathbf{a}$ es menor que r:

$$\mathscr{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}.$$

Para $n = 1$, este concepto coincide con el que ya se ha visto de entorno de un punto, razón por la cual a veces utilizaremos la palabra *entorno* de $\mathbf{a}$ como sinónimo de bola de centro $\mathbf{a}$; para $n = 2$, la bola de centro $\mathbf{a}$ y radio r es un círculo de centro $\mathbf{a}$ y radio r, excluida la circunferencia.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^n$ es un *punto frontera* de A si todo entorno de $\mathbf{a}$ contiene puntos de A y puntos que no son de A. La *frontera* de A es el conjunto formado por todos los puntos frontera de A, y se denota por $\mathscr{F}(A)$. Notemos que un punto frontera de A puede pertenecer o no al conjunto A, por lo que, en general, $\mathscr{F}(A)$ puede contener puntos de A y puntos que no son de A. Un conjunto A es *cerrado* si contiene todos los puntos de su frontera, es decir, si $\mathscr{F}(A) \subseteq A$; y un conjunto es *abierto* si no contiene ningún punto de su frontera, es decir, si $A \cap \mathscr{F}(A) = \emptyset$. (Subrayemos la obviedad de que abundan los conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.)

El conjunto $\overline{A} = A \cup \mathscr{F}(A)$ se denomina *adherencia* o *clausura* de A; ciertamente, un conjunto A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$. El conjunto $\mathring{A} = A \setminus \mathscr{F}(A)$ se denomina *interior* de A; vemos que A es abierto si, y sólo si, $A = \mathring{A}$. Los conjuntos abiertos pueden también caracterizarse por la siguiente propiedad: un conjunto A es abierto si, y sólo si, todo punto de A tiene un entorno contenido en A.

Un conjunto A está *acotado* si está contenido en alguna bola; equivalentemente, si está contenido en un producto de intervalos (v. problema 505).

Si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, se dice que es *compacto*. El concepto de compacidad es de gran importancia en relación con la continuidad de funciones, como veremos más adelante.

Un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de un conjunto A si toda bola centrada en $\mathbf{a}$ contiene algún punto de A distinto de $\mathbf{a}$. Esto es equivalente a decir que toda bola centrada en $\mathbf{a}$ contiene infinitos puntos de A (v. problema 506).

Funciones de varias variables: conceptos generales

■ Sean n y m números naturales. Una función de n variables reales es una aplicación $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ denominado *dominio* de f. Si $m = 1$, se dice que f es una *función real* o *escalar*. Si $m \geq 2$, se dice que f es una función *vectorial* (o también m-vectorial). La función f hace corresponder a cada elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ exactamente un elemento $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, el cual se denota por $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$; en este caso, se dice que $\mathbf{y}$ es *la imagen* de $\mathbf{x}$ y que $\mathbf{x}$ es *una antiimagen* u *original* de $\mathbf{y}$. El conjunto de imágenes se denota por $f(D)$ y se denomina el *recorrido* o la *imagen* de f.

Asociadas a una función vectorial $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, existen m funciones escalares $f_1, \dots, f_m$ de dominio D definidas por la propiedad

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))\,,$$

es decir, $f_i(\mathbf{x})$ es la i-ésima coordenada de $f(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in D$. Las funciones f_i se denominan *coordenadas* de f, y suele utilizarse la notación $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. A menudo, el estudio de una función vectorial se reduce al estudio de sus funciones coordenadas, por lo cual, si no se dice lo contrario, siempre nos referiremos a funciones reales, es decir, al caso $m = 1$.

Como en el caso de una variable, habitualmente queda definida una función mediante una expresión que permite calcular la imagen que corresponde a cada elemento, pero sin explicitar el dominio. En este caso, se sobreentiende que el dominio es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ para los que la expresión dada tiene sentido, es decir, el conjunto de puntos para los que es posible calcular la imagen.

Sea f una función real de dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(\mathbf{x}))$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, se denomina *gráfica* de f. Como ya sabemos, para $n = 1$ la gráfica es habitualmente una curva de $\mathbb{R}^2$. Para $n = 2$, la gráfica es usualmente una superficie de $\mathbb{R}^3$. En relación con las gráficas, son de utilidad los denominados *conjuntos de nivel* de f. Sea $k \in \mathbb{R}$. El conjunto $C_k = \{\mathbf{x} \in D \;:\; f(\mathbf{x}) = k\}$ se denomina *conjunto de nivel k* de la función f. Para $n = 2$, se trata de curvas de $\mathbb{R}^2$ que reciben el nombre específico de *curvas de nivel* de f.

Los conceptos de inyectividad, operaciones con funciones y cotas superiores e inferiores son completamente análogos a los conceptos correspondientes para funciones de una variable.

Límites y continuidad

■ Sean f una función real de dominio D y $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de D.

El *límite* de f en $\mathbf{a}$ es el número real ℓ si, para cada entorno $\mathscr{B}_\epsilon(\ell)$ de ℓ, existe un entorno $\mathscr{B}_\delta(\mathbf{a})$ tal que todos los puntos $\mathbf{x} \in D \cap (\mathscr{B}_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\})$ tienen sus imágenes en $\mathscr{B}_\epsilon(\ell)$. Equivalentemente, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in D \;\text{ y }\; 0 < d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta \;\Rightarrow\; |f(\mathbf{x}) - \ell| < \epsilon.$$

Apéndice
Las cónicas

Secciones cónicas

En diferentes capítulos del texto, hay referencias a elipses, parábolas e hipérbolas, que son las curvas conocidas genéricamente como *cónicas*. En este apéndice, proporcionamos una descripción esquemática de las cónicas, especialmente de sus ecuaciones cuando los ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

El nombre de cónicas proviene del de *secciones cónicas*, puesto que son curvas que se obtienen al intersecarse un cono y un plano.

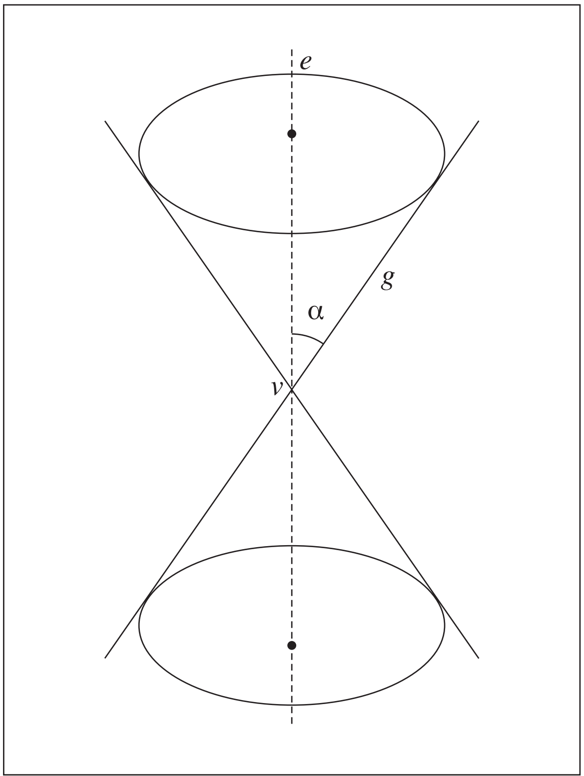

Fig. 8.10 Cono de revolución

Consideremos dos rectas en el espacio, e y g, que se cortan en un punto $\mathbf{v}$ y que forman un ángulo $\alpha < \pi/2$. Si la recta g gira en torno a la recta e manteniendo el ángulo α que forma con e fijo, genera una superfície denominada *cono de revolución*. La recta e se denomina *eje* del cono, la recta g es la *generatriz* y el punto $\mathbf{v}$ el *vértice* (v. figura 8.10).

Consideremos ahora un plano π que no pasa por el vértice del cono y que forma un ángulo β con el eje. Si $\alpha < \beta$, la intersección del plano y el cono es una curva cerrada que se denomina *elipse*; en el caso particular de que el plano sea perpendicular al eje ($\beta = \pi/2$), se obtiene una circunferencia. Si $\alpha = \beta$, es decir, si el plano es paralelo a la generatriz, entonces la intersección es una curva denominada *parábola*. Finalmente, si $\alpha > \beta$, la intersección es una curva con dos ramas que se denomina *hipérbola* (v. figura 8.11).

Por lo que aquí nos interesa, sin embargo, resulta más eficiente dar descripciones geométricas de cada tipo de cónica. En los apartados siguientes, damos estas definiciones y la ecuaciones más usuales de las cónicas.

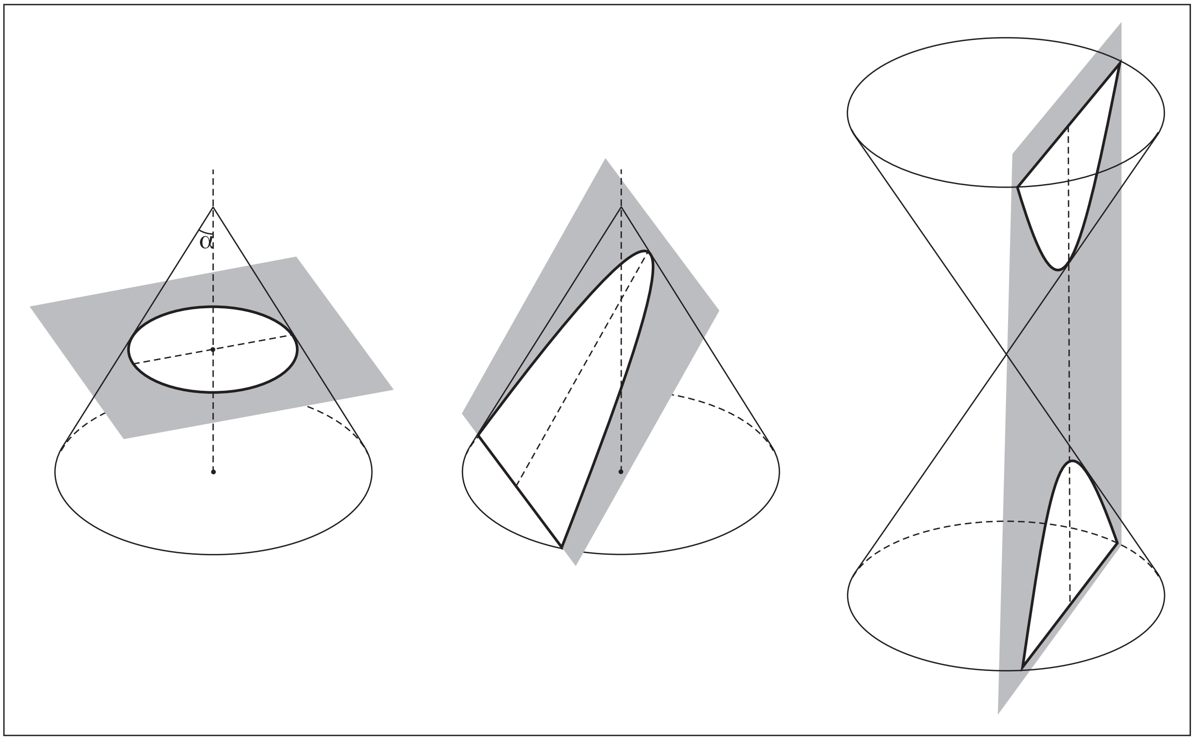

Fig. 8.11 Secciones cónicas

La elipse

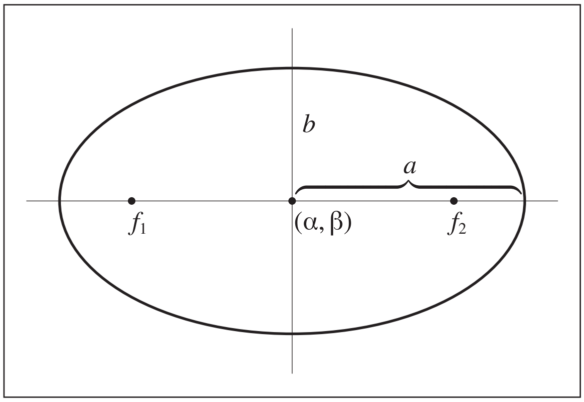

Fig. 8.12 Elipse

Una *elipse* es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos dados es constante.

Más formalmente, sean $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ dos puntos distintos del plano y $2s$ un número real, con $2s > d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. La elipse definida por $2s$ y focos $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ del plano tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) = 2s$. Los puntos $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ se denominan *focos*.

La curva así definida tiene dos ejes de simetría perpendiculares, cuya intersección es el *centro* de la elipse. La distancia máxima del centro a cualquier punto de la elipse se denomina *semieje mayor*, y la distancia mínima se denomina *semieje menor*. El número s anterior es uno de los semiejes.

La ecuación de una elipse cuyos ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados y que tiene centro en (α, β) y semiejes a y b es

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(figura 8.12).}$$