TEMES CLAU

M. Carme Leseduarte Milán
M. Dolors Llongueras Arola
Antoni Magaña Nieto

CÀLCUL D'UNA VARIABLE

TEMES CLAU 14

CÀLCUL D'UNA VARIABLE

M. Carme Leseduarte Milán
M. Dolors Llongueras Arola
Antoni Magaña Nieto

Edicions UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Aquesta obra compta amb el suport de la Generalitat de Catalunya

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Disseny de la coberta: Ernest Castelltort
Disseny de col·lecció: Tono Cristòfol
Maquetació: Mercè Aicart

Primera edició: març de 2009

Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 137 540 Fax: 934 137 541
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.ed

ISBN: 978-84-9880-356-3

Índex

Introducció

Per cursar qualsevol carrera d'enginyeria és necessari tenir uns bons fonaments en les disciplines científiques bàsiques, com és el càlcul. Aquest llibre, fruit de la nostra experiència docent durant els darrers anys, pretén posar a l'abast de l'estudiantat de les assignatures Càlcul I i Càlcul Infinitesimal I de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa (ETSEIAT) un resum complet de la teoria que s'imparteix en ambdues assignatures. Aquest resum teòric va acompanyat d'una extensa col·lecció de problemes resolts, que creiem que pot ajudar la persona interessada a entendre millor i consolidar els conceptes teòrics. Alhora, els problemes resolts es poden utilitzar com a model en el moment que l'alumnat hagi de resoldre altres problemes de forma autònoma. Per afavorir aquest aprenentatge autònom, s'ha inclòs un recull de problemes per resoldre (amb les seves solucions respectives).

El llibre està dividit en vuit capítols. Als sis primers, es tracten els temes clàssics d'un curs de càlcul d'una variable. El primer està dedicat als nombres reals i complexos. El segon, als conceptes bàsics de les funcions d'una variable real, com les operacions amb funcions o l'esbós de la gràfica d'una funció en coordenades polars. Al tercer capítol, s'estudia el concepte de límit d'una funció en un punt, la noció de funció contínua i les seves propietats. El capítol quart està dedicat a la derivació de funcions i les seves aplicacions. Al cinquè, s'introdueix la integral de Riemann per a funcions d'una variable, es veuen mètodes per determinar primitives i s'estudien aplicacions de la integral al càlcul d'àrees planes, de volums de cossos de revolució i de volums de cossos de secció donada. Al capítol sisè, s'estudien les successions i les sèries, començant pel principi d'inducció matemàtica i acabant amb les sèries de potències, tant reals com complexes, que seran d'utilitat en assignatures posteriors.

La matèria del capítol setè, que hem titulat *Conceptes previs*, no forma part, estrictament parlant, del programa de les assignatures de càlcul que s'han mencionat anteriorment. Tanmateix, ens ha semblat oportú incloure en aquest capítol un breu resum de resultats teòrics i pràctics que, suposadament, ja haurien d'haver estat explicats en assignatures prèvies. Com que sovint aquesta suposició no és del tot certa, es recorden les beceroles del càlcul. Per exemple, es repassen propietats dels polinomis o conceptes bàsics de geometria, com ara les fórmules per calcular àrees d'algunes figures planes o volums de sòlids regulars. També hi ha un resum de trigonometria plana i de geometria analítica. Es recorda com es resolen equacions de diversos tipus (polinòmiques, irracionals, trigonomètriques...) i es repassa el càlcul de derivades i el de primitives. Cal destacar que aquest capítol comença amb un test que serveix per mesurar els coneixements inicials de l'alumne o l'alumna. D'aquesta manera, cada estudiant pot decidir en quins aspectes ha d'aprofundir més o menys. Finalment, el capítol vuitè conté les solucions del test i de tots els problemes proposats al llarg del text. També s'ha inclòs un índex alfabètic per facilitar la localització dels conceptes.

Per acabar, volem agrair la col·laboració dels companys i les companyes de la Secció de Terrassa del Departament de Matemàtica Aplicada II; alguns d'ells han aportat desinteressadament problemes que ara formen part d'aquest recull; d'altres han contribuït amb els seus comentaris a configurar el material que finalment s'hi ha inclòs. També volem donar les gràcies a Edicions UPC, que s'encarrega de l'edició i la difusió d'aquest llibre.

Terrassa, març de 2008

M. C. Leseduarte, M. D. Llongueras i A. Magaña

1 Els nombres

1.1 Diferents classes de nombres

Els primers nombres que vam conèixer, ja de petits, van ser els *nombres naturals*. Sorgeixen de la necessitat de comptar: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Aquests, però, no són suficients per descriure moltes situacions quotidianes elementals, com ara una quantitat de diners que devem a algú, una temperatura sota zero... Des d'un punt de vista estrictament matemàtic, la insuficiència de $\mathbb{N}$ es manifesta en intentar resoldre l'equació $x + b = a$, que només té solució en $\mathbb{N}$ si a és més gran que b.

Per tal de resoldre aquest tipus de situacions i d'altres de semblants, es construeix el conjunt dels *nombres enters*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Tanmateix, si volem repartir equitativament un litre de suc de taronja entre 3 persones, la quantitat exacta que correspon a cadascuna d'elles no es pot expressar mitjançant un nombre enter. Com abans, des d'un punt de vista matemàtic, equacions del tipus $q \cdot x = p$ (amb $q \neq 0$) no sempre tenen solució en $\mathbb{Z}$.

Necessitem, doncs, un altre conjunt més gran que $\mathbb{Z}$, on les qüestions anteriors tinguin resposta. Aquest conjunt és el dels *nombres racionals*: $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$. D'aquests quocients entre dos nombres enters, en diem *fraccions*. Hi ha infinites fraccions que representen el mateix nombre racional; penseu, per exemple, en $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$... Es diu que dues fraccions són *equivalents* si representen el mateix nombre racional. De totes les fraccions equivalents a una donada, s'anomena *fracció irreductible* aquella tal que el màxim comú divisor (m.c.d.) del denominador i el numerador és 1 (és a dir, $\frac{p}{q}$ és irreductible si m.c.d.$(p, q) = 1$).

Observem que tots els nombres naturals són enters i que tots els enters són nombres racionals. Notem també que hem considerat el 0 com a nombre enter però no natural. Malauradament, tots aquests nombres són insuficients per mesurar exactament determinades longituds.

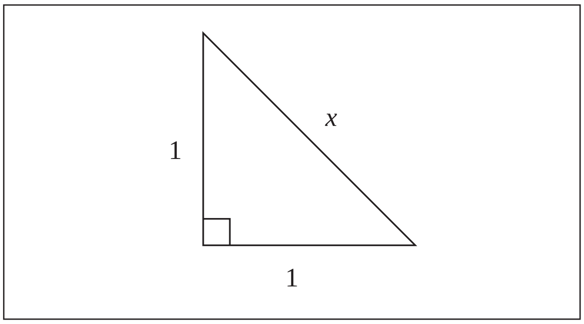

Fig. 1.1 Diagonal $\sqrt{2}$

Per exemple, donat un triangle rectangle amb catets d'una unitat, quant fa exactament la hipotenusa? Si designem per x la hipotenusa i apliquem el teorema de Pitàgores (figura 1.1), tindrem $x^2 = 1 + 1$, d'on $x = \sqrt{2}$. Però resulta que $\sqrt{2}$ no és racional. Com ampliem ara el conjunt de nombres?

1.2 Els nombres reals

Els nombres reals constituiran el suport del nostre curs. En aquesta secció, veurem com es representen i quines propietats tenen.

Representació dels nombres sobre una recta

Considerem una recta i, en un punt arbitrari, hi col·loquem el número 0 (aquest punt l'anomenarem *l'origen*). A la dreta del 0, a una distància indeterminada que podem triar com vulguem, hi col·loquem el número 1, *la unitat*. Els altres nombres queden fixats sobre la recta: els naturals ordenats cap a la dreta del 0 separats un del següent per una unitat. Anàlogament, però cap a l'esquerra, hi afegim els enters negatius.

Per dibuixar els racionals, dividim la unitat en parts iguals, tantes com indica el denominador, i n'agafem les que indica el numerador partint del 0 i tenint en compte el signe. Entre dos racionals qualssevol, hi ha un altre racional (sabríeu dir-ne cap?). Amb tot això queden a la recta molts "forats", com ara, $\sqrt{2}, \pi, e$... Aquests "forats" representen els *nombres irracionals* i els designarem per $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Finalment, la reunió de tots els nombres que hem exposat constitueixen el conjunt dels *nombres reals* i els designarem per $\mathbb{R}$. La figura 1.2 esbossa aquest conjunt. Tenim $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

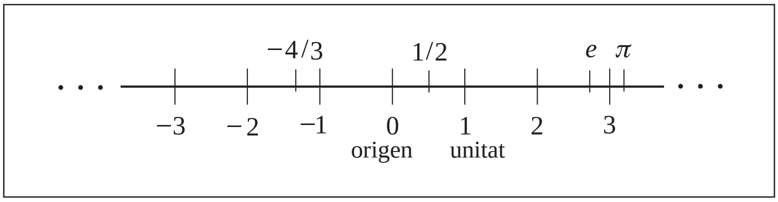

Fig. 1.2 Els nombres reals

Els irracionals es designen $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ perquè representen el complementari de $\mathbb{Q}$ dins $\mathbb{R}$. Clarament, les relacions d'inclusió entre els conjunts numèrics que hem descrit són

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

A cada nombre real, li correspon un únic punt de la recta i, a cada punt de la recta, li correspon un únic nombre real. Així, la recta s'anomena *recta real*. D'aquesta manera, parlarem indistintament de nombres i de punts (figura 1.3).

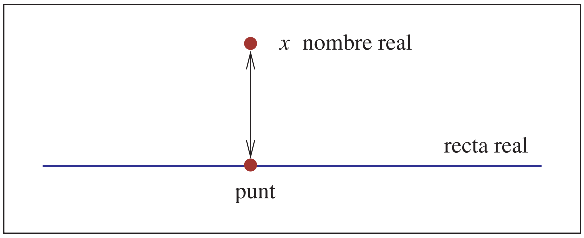

Fig. 1.3 Equivalència entre nombres reals i punts

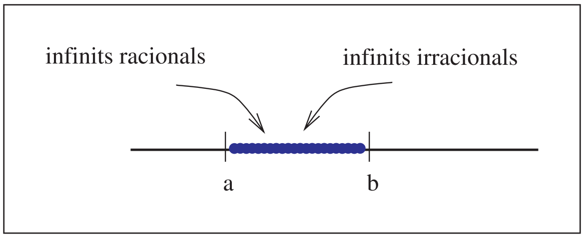

Fig. 1.4 Densitat dels racionals i els irracionals dins $\mathbb{R}$

Propietat de densitat de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Entre dos reals diferents qualssevol hi ha infinits racionals i també infinits irracionals. Per tant, no podem agafar cap segment de la recta real que estigui format només per racionals, o només per irracionals (com il·lustra la figura 1.4). D'això, se'n diu *propietat de densitat de* $\mathbb{Q}$ i *de* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$.

Ordenació dels nombres reals

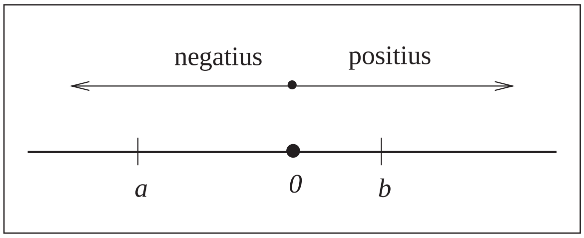

Fig. 1.5 Orientació dels nombres reals

Els nombres situats a la dreta de l'origen són els *positius* i els de l'esquerra, els *negatius* (figura 1.5). Utilitzem els símbols $<, >, =$ per establir la posició relativa entre dos punts en la recta. Els podem combinar i obtenim els nous símbols $\leq$, $\geq$.

L'expressió $a \leq b$ significa que a és més petit o igual que b, i, anàlogament, $a \geq b$ significa que a és més gran o igual que b. Aleshores, són certes les expressions

$$5 < 7, \quad 4 \leq 9, \quad 7 \leq 7, \quad 7 = 7, \quad 6 > 2, \quad 8 \geq 3, \quad 1 \geq 1;$$

en canvi, són falses les expressions $7 < 7$, $5 > 5$, $3 \geq 5$.

A l'hora de manipular expressions amb desigualtats, hem de tenir en compte les regles següents.

Propietats de les desigualtats. Per a qualssevol nombres reals a, b, c, es compleix:

- $a < b \quad \text{i} \quad b < c \implies a < c.$
- $a < b \implies a + c < b + c \quad \text{i} \quad a - c < b - c.$
- $a < b \quad \text{i} \quad c < d \implies a + c < b + d.$
- $a < b \implies \begin{cases} ac < bc & \text{si} \quad c > 0. \\ ac > bc & \text{si} \quad c < 0. \end{cases}$

  En particular, $a < b \implies -b < -a$.
- $0 < a < b \implies \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > 0.$
- $a < 0 < b \implies \dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}.$
- $a < b < 0 \implies 0 > \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}.$

Intervals i semirectes

Els intervals i les semirectes (o intervals no fitats) són subconjunts notables de $\mathbb{R}$. Per comoditat, a l'hora de designar-los (i per altres avantatges), introduirem els símbols $+\infty$ i $-\infty$. Convé insistir especialment en el fet que $+\infty$ i $-\infty$ no són nombres. Més endavant també es farà palesa la seva utilitat en l'estudi dels límits.

- *Interval obert*

  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

- *Interval tancat*

  $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

- *Intervals mixtos*

  $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

  $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

- *Semirectes obertes*

  $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

  $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

- *Semirectes tancades*

  $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$

  $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$

Inequacions

> S'anomena *inequació* tota desigualtat algebraica en què apareixen nombres i incògnites. El conjunt de nombres que compleixen la desigualtat s'anomena *solució de la inequació*.

En el procés de resolució de les inequacions, cal tenir en compte les propietats de les desigualtats.

Exemple 1.1

Resolem la inequació $\dfrac{2x-1}{x+1} \le 1$. Es compleix que

$$\frac{2x-1}{x+1} \le 1 \iff \frac{2x-1}{x+1} - 1 \le 0 \iff \frac{x-2}{x+1} \le 0$$

Per tant, cal considerar els casos en què el numerador sigui positiu o 0 i el denominador negatiu, o bé que el numerador sigui negatiu o 0 i el denominador positiu:

$$\begin{cases} x-2 & \ge 0 \\ x+1 & < 0 \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} x-2 & \le 0 \\ x+1 & > 0 \end{cases}$$

i així,

$$\begin{cases} x & \ge 2 \\ x & < -1 \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} x & \le 2 \\ x & > -1 \end{cases}$$

Finalment, el conjunt solució és: $x \in (-1,2]$.

Suprem, ínfim, màxim i mínim

Sovint ens interessarà situar un conjunt determinat dins la recta real, en el sentit de conèixer nombres que en limitin l'abast; per exemple, nombres que siguin més grans o iguals que tots els elements del conjunt.

Definició 1.2 Sigui A un conjunt de nombres reals.

- Un nombre $k \in \mathbb{R}$ *és una fita superior de* A, si $x \leq k$, $\forall x \in A$.
- Un nombre $k \in \mathbb{R}$ *és una fita inferior de* A, si $x \geq k$, $\forall x \in A$.

Òbviament, si $k \in \mathbb{R}$ és una fita superior (resp. inferior) de A, aleshores qualsevol nombre real més gran (resp. petit) o igual que k també n'és fita superior (resp. inferior).

Definició 1.3 Sigui A un conjunt de nombres reals.

- Si A té alguna fita superior, s'anomena *conjunt fitat superiorment*.
- Si A té alguna fita inferior, s'anomena *conjunt fitat inferiorment*.

Un conjunt fitat superior i inferiorment es diu *conjunt fitat*.

Exemples 1.4

Estudiem uns quants conjunts de nombres reals.

a) Els intervals $[0,1]$ i $(0,1)$ són conjunts fitats. En efecte, qualsevol nombre més gran o igual que 1 n'és fita superior, i qualsevol nombre negatiu o 0 n'és fita inferior. Així, el conjunt de les fites superiors és $[1,+\infty)$, i el de les fites inferiors, $(-\infty,0]$.

b) El conjunt dels nombres naturals és fitat inferiorment, però no superiorment, en $\mathbb{R}$. És evident que $1 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Per tant, l'1 i qualsevol nombre real menor que 1 són fites inferiors de $\mathbb{N}$. En canvi, no existeix cap nombre real més gran o igual que tots els nombres naturals a la vegada.

c) El conjunt dels nombres racionals no és fitat, ni superiorment ni inferiorment.

Definició 1.5 Sigui A un conjunt de nombres reals.

- Si A és fitat superiorment, la més petita de les fites superiors de A s'anomena *el suprem del conjunt* A i es designa per $\sup A$. Quan $\sup A \in A$, aquest nombre s'anomena *el màxim del conjunt* A i s'escriu $\text{màx} A$.
- Si A és fitat inferiorment, la més gran de les fites inferiors de A s'anomena *l'ínfim del conjunt* A i es designa per $\inf A$. En cas que $\inf A \in A$, aquest nombre s'anomena *el mínim del conjunt* A i es designa per $\text{mín} A$.

Els conjunts fitats superiorment tenen suprem, però no sempre tenen màxim. El màxim d'un conjunt, quan existeix, és l'element més gran del conjunt. Anàlogament, els conjunts fitats inferiorment tenen ínfim; en canvi, l'existència del mínim depèn de cada cas.

2 Funcions

2.1 Conceptes bàsics

En aquest capítol, estudiarem les funcions reals d'una variable real.

Una *funció* expressa la idea que una quantitat depèn o està determinada per una altra o altres. Per exemple, la longitud d'una circumferència depèn de la longitud del seu radi, el volum d'un cilindre depèn de la longitud del radi de la base i de l'altura, el cost de produir un article determinat depèn del nombre d'articles produïts, de la mà d'obra...

Definició 2.1 Una *funció dels nombres reals als nombres reals* és una relació que fa correspondre a cada nombre real (d'un conjunt determinat anomenat *domini*) un altre nombre real, d'una manera única. També s'anomena *funció real de variable real*.

Usualment, per expressar simbòlicament aquesta relació es fa servir la notació següent:

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

La f representa la relació de dependència que existeix entre la x i la y, D és el *domini* de la funció, i el fet d'escriure $y = f(x)$ vol dir que hi ha una forma explícita (una fórmula) que permet calcular la y a partir de la x. Diem que x és la variable independent, i y la variable dependent. Evidentment, les lletres per representar les variables poden ser unes altres.

Quan no s'especifica el domini d'una funció, s'entén que aquest és el conjunt de $\mathbb{R}$ més gran possible. En notació abreujada:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

De vegades, també és interessant conèixer el conjunt *imatge, recorregut* o *rang* de la funció. Aquest està format per tots els nombres reals que s'obtenen en aplicar la funció a tots els nombres del seu domini. En notació abreujada:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

Exemple 2.2

Considerem la funció $f(x) = x^2$ (o, simplement, $y = x^2$). És clar que el seu domini és tot $\mathbb{R}$, atès que qualsevol nombre real es pot elevar al quadrat. Tanmateix, la seva imatge és el conjunt dels nombres reals més grans o iguals que 0.

Prenent un sistema de referència cartesià (és a dir, una recta horitzontal i una altra de vertical que es tallen en un punt distingit, que anomenarem *l'origen de coordenades*), és possible representar gràficament una funció donada explícitament. A l'eix horitzontal (o eix d'abscisses), hi posarem les x, i a l'eix vertical (o eix d'ordenades) les y. Aleshores, la gràfica d'una funció $y = f(x)$ està formada per les parelles de punts (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tals que $y = f(x)$, essent x un nombre del domini de f.

Exemple 2.3

A la figura 2.1 veiem, a l'esquerra, un esbós de la gràfica de la funció $y = x^2$ i a la dreta, un de la funció $y = [x]$ (anomenada *part entera de* x).

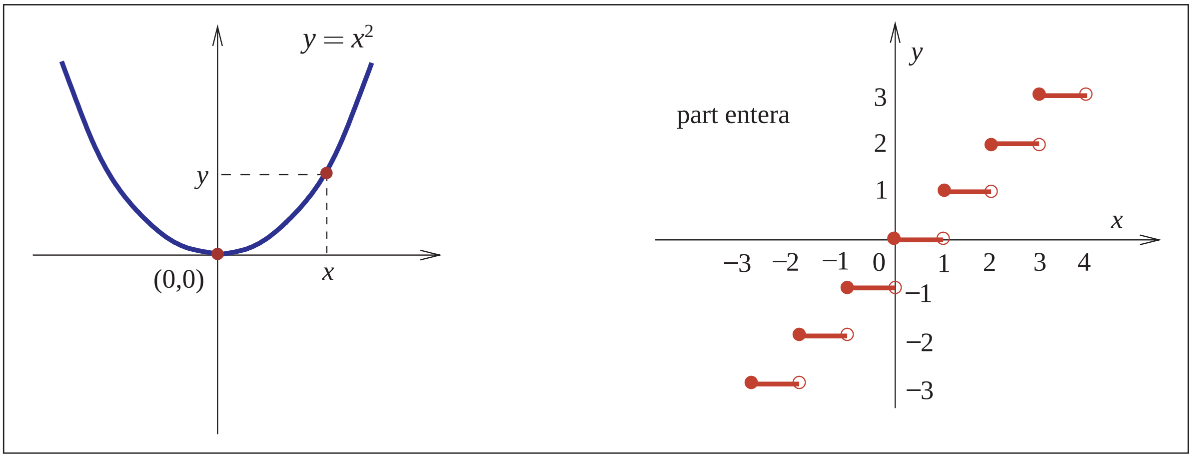

Fig. 2.1 Les funcions $y = x^2$ i $y = [x]$

Atenent el comportament de la funció, aquesta pot rebre diversos qualificatius.

Definició 2.4 Diem que una funció $y = f(x)$ amb domini D és:

- *Parella* si $f(x) = f(-x)$, per a tot $x \in D$.
- *Imparella* o *senar* si $f(x) = -f(-x)$, per a tot $x \in D$.
- *Periòdica* si $f(x) = f(x+kT)$, $T \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ (T és *el període de* f).
- *Creixent* en $A \subset D$ si, per a tot $x_1, x_2 \in A$, amb $x_1 < x_2$, es té $f(x_1) \leq f(x_2)$.

  Estrictament creixent en $A \subset D$ si la desigualtat anterior és estricta.
- *Decreixent* en $A \subset D$ si, per a tot $x_1, x_2 \in A$, amb $x_1 < x_2$, es té $f(x_1) \geq f(x_2)$.

  Estrictament decreixent en $A \subset D$ si la desigualtat anterior és estricta.
- *Monòtona* en A si és creixent o decreixent en A.

  Estrictament monòtona en A si és estrictament creixent o decreixent en A.

Exemple 2.5

a) La funció $f(x) = x^2$ és parella, estrictament decreixent en l'interval $(-\infty, 0]$ i estrictament creixent en $[0, \infty)$.

b) La funció $f(x) = [x]$ és creixent en $\mathbb{R}$, però no estrictament creixent.

Exemple 2.6

a) Les figures 2.2 i 2.3 mostren les gràfiques de funcions parelles i imparelles, respectivament.

b) La figura 2.4 mostra dos exemples de funcions periòdiques.

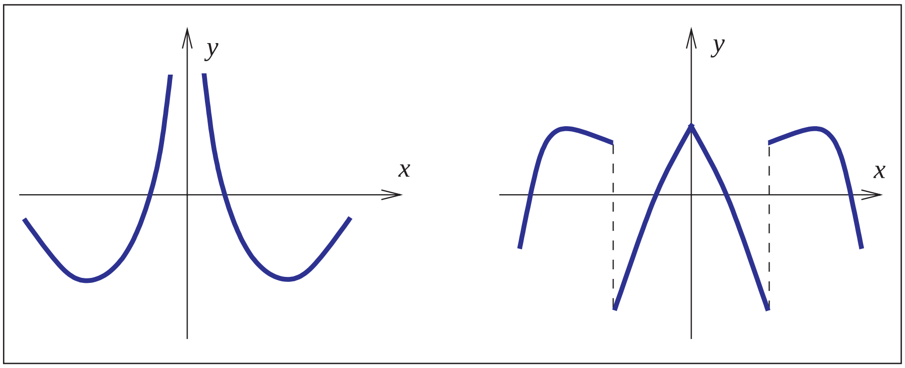

Fig. 2.2 Funcions parelles

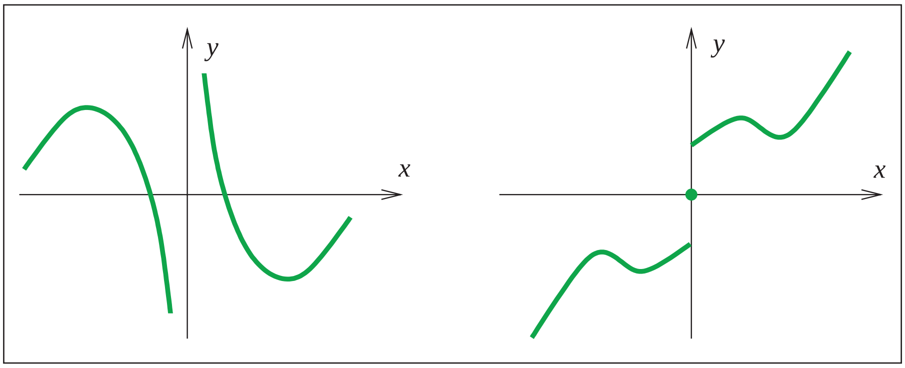

Fig. 2.3 Funcions imparelles

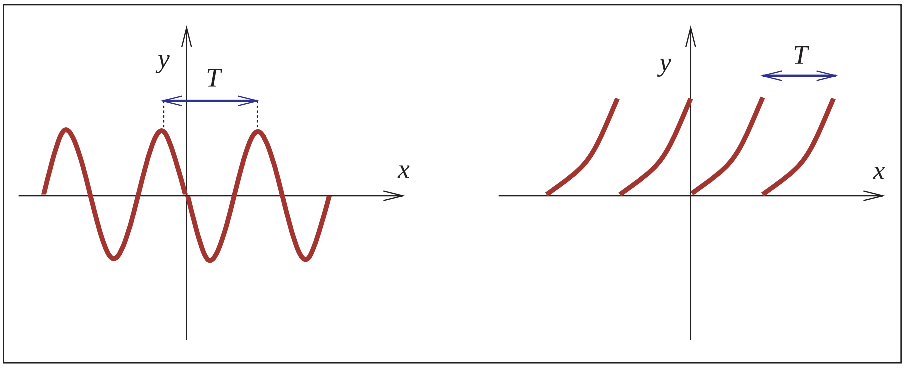

Fig. 2.4 Funcions periòdiques de període T

c) Les figures 2.5 i 2.6 corresponen a gràfiques de funcions monòtones creixents i decreixents.

d) A la figura 2.7 podem veure les gràfiques de dues funcions monòtones a trossos.

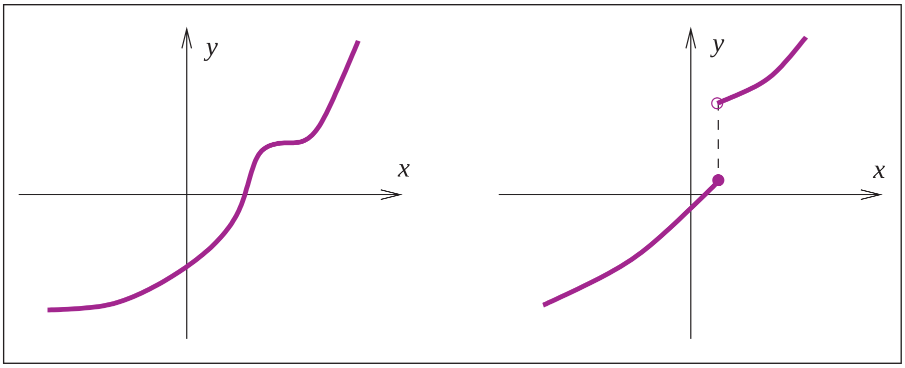

Fig. 2.5 Funcions creixents. La de la dreta és estrictament creixent

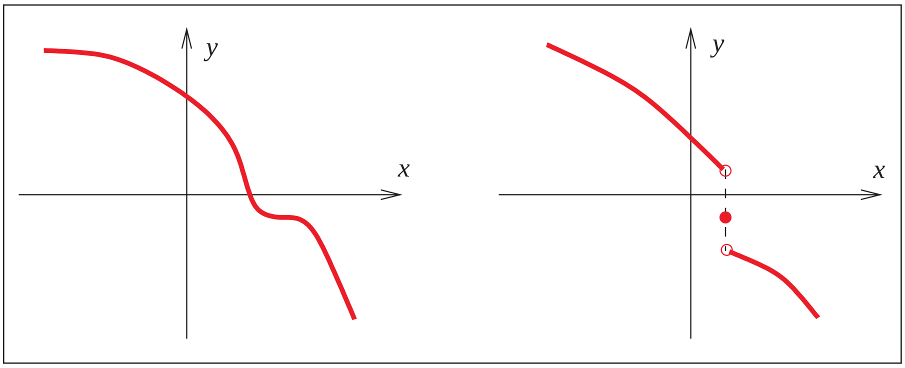

Fig. 2.6 Funcions decreixents. La de la dreta és estrictament decreixent

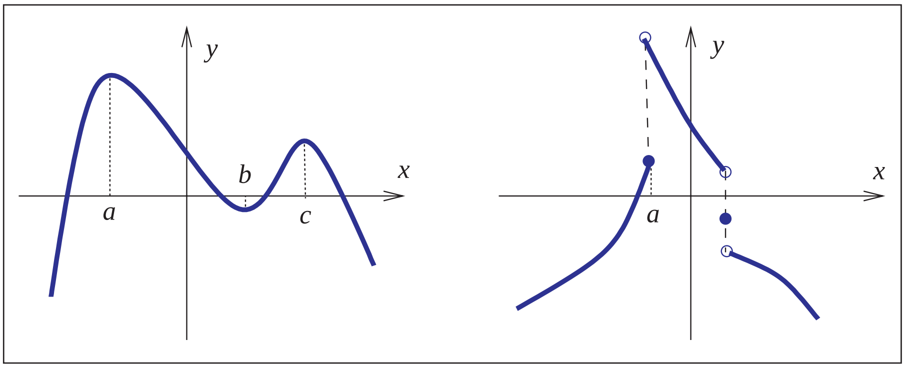

Fig. 2.7 Funcions monòtones a trossos

Definició 2.7

- Una funció $f(x)$ *és fitada inferiorment en* $D \subset \mathbb{R}$ si existeix un nombre real M_1 tal que $M_1 \leq f(x)$, $\forall x \in D$; en aquest cas, M_1 és *una fita inferior de* $f(x)$.
- Una funció $f(x)$ *és fitada superiorment en* $D \subset \mathbb{R}$ si existeix un nombre real M_2 tal que $f(x) \leq M_2$, $\forall x \in D$; en aquest cas, M_2 és *una fita superior de* $f(x)$.
- Una funció $f(x)$ *és fitada en* $D \subset \mathbb{R}$ si ho és inferior i superiorment, és a dir, si existeixen nombres reals M_1, M_2 tals que $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, $\forall x \in D$.

La definició anterior de funció fitada és equivalent a dir que existeix un nombre real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, per a tot $x \in D$.

Exemple 2.8

La funció $f(x) = x^2$ és fitada inferiorment perquè, per exemple, $f(x) \geq 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. En canvi, no és fitada superiorment ja que, per a qualsevol constant $K \in \mathbb{R}$, existeix un nombre real x tal que $x^2 > K$.

2.2 Les funcions elementals

En aquesta secció, repassarem les funcions més usuals i n'introduirem algunes de noves.

Funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és del tipus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

amb $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ i n un nombre enter més gran o igual que zero. Evidentment, el domini d'una funció polinòmica és $\mathbb{R}$.

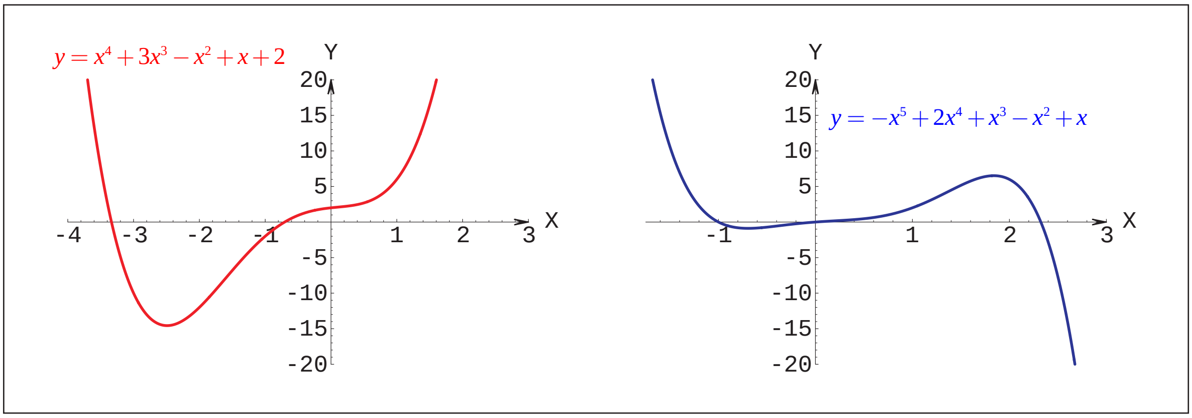

Fig. 2.8 Polinomi de grau 4 amb un sol extrem i polinomi de grau 5 amb dos extrems

Si $n = 0$, s'obtenen les funcions constants: $f(x) = k$. Les gràfiques d'aquestes funcions són rectes horitzontals.

Si $n = 1$, s'obtenen les funcions afins: $f(x) = ax + b$. La gràfica d'una funció afí és una recta inclinada de pendent a. Quan $a > 0$, la funció és estrictament creixent i, quan $a < 0$, estrictament decreixent.

Si $n = 2$, s'obtenen les funcions quadràtiques: $f(x) = ax^2 + bx + c$. La gràfica d'una funció quadràtica és una paràbola. Quan $a > 0$, la paràbola decreix fins al seu vèrtex i a partir d'ell creix. Quan $a < 0$, primer creix i després decreix.

A mesura que n augmenta, també augmenta la complexitat de les funcions polinòmiques. De vegades, per fer l'esbós de la gràfica d'una funció polinòmica, pot ser útil conèixer el nombre d'extrems que té.

3 Continuïtat

3.1 Límit d'una funció en un punt

La idea de límit és present de forma intuïtiva en moltes situacions. Per exemple:

- una velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes,
- l'àrea d'una regió limitada per corbes és el límit de les àrees de les regions determinades per segments,
- la suma d'infinits nombres es pot pensar com el límit d'una suma d'un nombre finit de sumands.

Definició 3.1 Definició de límit. *Cauchy* $(\varepsilon - \delta)$.

Diem que *una funció* $f(x)$ *té límit* $l \in \mathbb{R}$ *quan* x *tendeix al punt* a si, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, aleshores $|f(x) - l| < \varepsilon$ (figura 3.1).

En aquest cas, escrivim

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

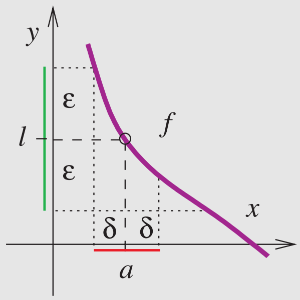

Fig. 3.1 Límit d'una funció

Intuïtivament, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ significa que, quan x s'apropa al punt a (però és diferent de a), la imatge $f(x)$ s'acosta a l.

Observació 3.2 *Si existeix el límit d'una funció en un punt, aquest és únic.*

Anàlogament a la definició de límit d'una funció en un punt, podem considerar els límits laterals. És tracta de fer tendir la x cap a a, però només per un costat, és a dir, o bé per la dreta, o bé per l'esquerra del punt a.

Definició 3.3

- *El límit de $f(x)$ quan x tendeix al punt a per la dreta és l* si, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta \text{ amb } x > a, \text{ aleshores } |f(x)-l| < \varepsilon.$$

- *El límit de $f(x)$ quan x tendeix al punt a per l'esquerra és l* si, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta \text{ amb } x < a, \text{ aleshores } |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Aquests límits els designem, respectivament, per

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

És clar que, per tal que una funció tingui límit en un punt, és necessari i suficient que existeixin els límits laterals i coincideixin:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l.}$$

Eventualment, si considerem el límit d'una funció en un punt extrem d'un interval tancat $[a,b]$, només té sentit el límit lateral per la dreta en a i el límit lateral per l'esquerra en b.

Val a dir que el concepte de límit és de tipus local; això significa que el límit d'una funció en un punt a només depèn del comportament de la funció en els punts propers al punt a. Encara més, ni tan sols és necessari que la funció estigui definida en a.

Teorema 3.4 Límits i operacions algebraiques. *Siguin $f(x)$ i $g(x)$ funcions tals que $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, on $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Aleshores, les funcions $f+g$, $f-g$ i $f\cdot g$ també tenen límit en el punt a i es compleix que*

- $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$.
- $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = l_1 - l_2$.
- $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$.
- $\lim_{x\to a} (\lambda f)(x) = \lambda l_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

A més, si $l_2 \neq 0$, llavors

- $\lim_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Límits infinits i límits en l'infinit

Ampliem el concepte de límit per a les funcions tals que, per exemple, quan x s'acosta al punt a, la funció creix tant com vulguem.

Definició 3.5

- *El límit de* $f(x)$ *quan x tendeix al punt* a *és* $+\infty$ si, per a cada $M > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si}\ \ 0 < |x-a| < \delta\ \ \text{aleshores}\ \ f(x) > M.$$

- *El límit de* $f(x)$ *quan x tendeix al punt* a *és* $-\infty$ si, per a cada $M < 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si}\ \ 0 < |x-a| < \delta\ \ \text{aleshores}\ \ f(x) < M.$$

Aquests límits els designem, respectivament, per

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Aquí també tenen sentit els límits laterals i es compleix

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Per a la primera funció f de la figura 3.2, se satisfà

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty,$$

i, per a la segona gràfica de la mateixa figura, tenim

$$\lim_{x\to 10^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 10^-} g(x) = 0.$$

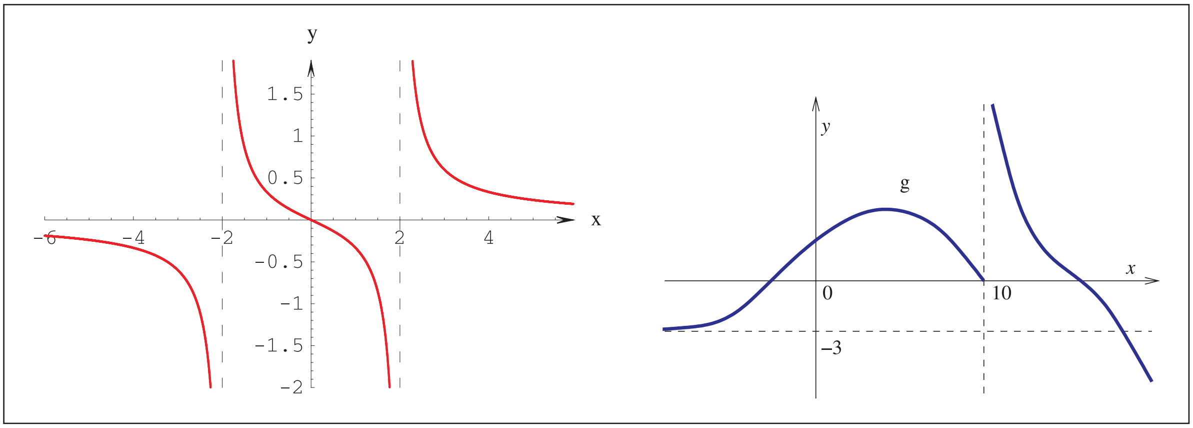

Fig. 3.2 Diferents comportaments de les funcions

Ens preguntem també pel comportament de les funcions quan el seu domini és no fitat i la x es fa tan gran o tan negativa com vulguem. Ara parlarem de x que tendeix cap a $+\infty$ i x tendeix cap a $-\infty$.

Definició 3.6

- *El límit de* $f(x)$ *quan x tendeix a* $+\infty$ és $l \in \mathbb{R}$ si, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix un $M > 0$ tal que

$$\text{si } x > M \text{ aleshores } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- *El límit de* $f(x)$ *quan x tendeix a* $-\infty$ és $l \in \mathbb{R}$ si, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix un $M < 0$ tal que

$$\text{si } x < M \text{ aleshores } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Aquests límits els designem, respectivament, per

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

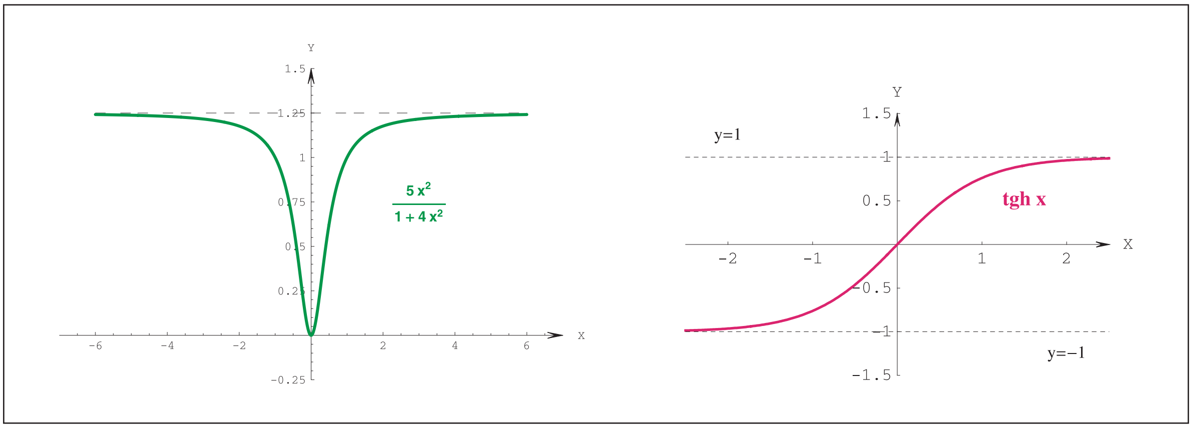

Fig. 3.3 Comportament de les funcions $f(x) = \dfrac{5x^2}{1+4x^2}$ i $g(x) = \mathrm{tgh}\, x$

Com a exemples, observem les gràfiques de la figura 3.3. Tenim

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{1+4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2}{1+4x^2} = \frac{5}{4}, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{tgh}\, x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{tgh}\, x = -1.$$

A la segona gràfica de la figura 3.2, veiem que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3$.

Finalment, també es pot parlar de límits infinits en l'infinit: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ de forma anàloga als anteriors. Per exemple, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. La funció de la dreta de la figura 3.2 compleix $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Operacions amb infinits

Quan operem amb límits infinits no podem aplicar els resultats del teorema 3.4. També hi ha algunes operacions que no es poden fer directament amb límits que valen 0. Tanmateix, esbossem primer un esquema de les operacions que no representen cap dificultat.

Amb la suma:

f	g	$f+g$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	a	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	a	$-\infty$

Amb el producte:

f	g	$f \cdot g$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$a > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Amb el quocient:

f	$1/f$
$\pm\infty$	0
$0,\ \ f > 0$	$+\infty$
$0,\ \ f < 0$	$-\infty$

De vegades, ens trobem amb límits que no tenen un resultat immediat perquè no podem aplicar cap regla o propietat. Aleshores tenim una indeterminació i hem de fer-ne un estudi concret en cada cas. Les indeterminacions són:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Algunes es poden resoldre simplement manipulant l'expressió de les funcions que hi apareixen; en canvi, d'altres necessiten eines més sofisticades i les deixarem per al capítol de derivació.

Vegem, per exemple, per què parlem de la indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$. El quocient de límits de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ no sempre dóna el mateix resultat; a priori, no podem concloure res. Considerem els límits següents

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Tenim

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

indeterminacions del mateix tipus, però els resultats són ben diferents. És immediat calcular-los:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

4 Derivació

4.1 Definició i interpretació del concepte de derivada

A continuació, introduïm un dels conceptes clau de l'anàlisi matemàtica: la derivada d'una funció.

Definició 4.1 Sigui una funció $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, on D és un interval, una semirecta o tot $\mathbb{R}$. Diem que f és *derivable* o *diferenciable en* $a \in D$ si existeix el límit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (*)$$

i és finit. En aquest cas, el valor del límit s'anomena *derivada de* f *en* a i el designem per $f'(a)$.
Si el límit és $+\infty$ o $-\infty$, diem que f té *derivada infinita en* a.

Si diem que f té derivada en a, s'entendrà que $f'(a) \in \mathbb{R}$.

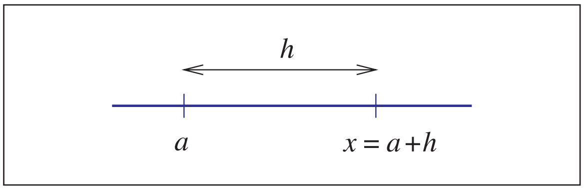

Fig. 4.1 Increment de la variable

El límit de la definició de derivada es pot escriure d'una altra manera, que també és força usual. Posem $x = a+h$; aleshores, l'increment h esdevé $x-a$. Dir que l'increment tendeix a 0 ($h \to 0$) equival a dir que x s'acosta al punt a ($x \to a$). Esquemàticament, a la figura 4.1 tenim

$$\begin{array}{lcl} x = a+h & \Longleftrightarrow & h = x-a \\ x \to a & \Longleftrightarrow & h \to 0 \end{array}$$

Podem escriure el límit de la definició de derivada com

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

A vegades, també s'utilitza la notació

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x,a)}{\Delta x}.$$

En qualsevol de les diferents notacions que hem considerat, queda palès que la derivada és el límit d'un quocient incremental:

$$\frac{\text{increment de la funció}}{\text{increment de la variable}}.$$

Observació 4.2 *Assenyalem ara dues propietats de la derivada degudes a la seva definició a partir d'un límit:*

- *unicitat (si la derivada existeix, és única),*
- *caràcter local (la derivada depèn del comportament de la funció en un entorn del punt).*

Si una funció $y = f(x)$ és derivable en cada punt d'un conjunt D, es diu que f és derivable en D. Això permet parlar de *la funció derivada de* f. Per designar la funció derivada, es fan servir diverses notacions. Aquí en tenim unes quantes:

$$f'(x),\ f',\ y'(x),\ y',\ \frac{df}{dx}(x),\ \frac{df}{dx},\ \frac{dy}{dx}(x),\ \frac{dy}{dx},\ \text{etc.}$$

A la taula següent, tenim tres interpretacions del concepte de derivada.

	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
FÍSICA	Velocitat mitjana d'un mòbil en un interval de temps $[a, a+h]$	Velocitat instantània d'un mòbil en un instant de temps $t = a$
GEOMÈTRICA	Pendent de la recta secant a f en $(a, f(a))$ i $(a+h, f(a+h))$	Pendent de la recta tangent a f en el punt $(a, f(a))$
MATEMÀTICA	Variació mitjana de f en un interval $[a, a+h]$	Coeficient de variació o variació instantània de f en un punt $x = a$

Interpretació física. El problema de la velocitat instantània

Suposem que un mòbil es desplaça amb un moviment rectilini. Sigui $y = f(t)$ la funció que expressa la distància recorreguda en funció del temps t. Volem determinar la velocitat instantània en l'instant t.

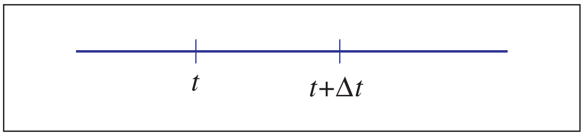

Fig. 4.2 Increment de temps

La forma natural és considerar primer la velocitat mitjana del mòbil entre dos instants de temps t i $t + \Delta t$ (figura 4.2). Òbviament, serà l'espai recorregut, dividit pel temps. És a dir,

$$v_m = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

La velocitat instantània s'obté fent tendir a 0 l'increment de temps Δt:

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} v_m = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Interpretació geomètrica. El problema de la recta tangent

Considerem una corba donada per la gràfica d'una funció $y = f(x)$. Es tracta de definir la tangent a la corba en un punt $P = (a, f(a))$.

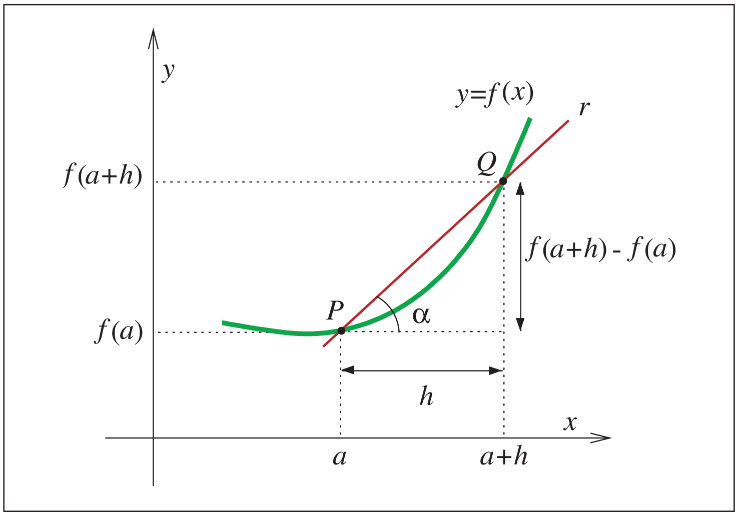

Fig. 4.3 Recta secant a la gràfica de f que passa per P i Q

Siguin r la recta secant que passa pels punts $P = (a, f(a))$ i $Q = (a+h, f(a+h))$, i α l'angle que forma r amb l'eix d'abscisses, com mostra la figura 4.3. Sabem que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El pendent de r és precisament $\operatorname{tg}\alpha$. Aleshores, l'equació de la recta r queda

$$y = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a).$$

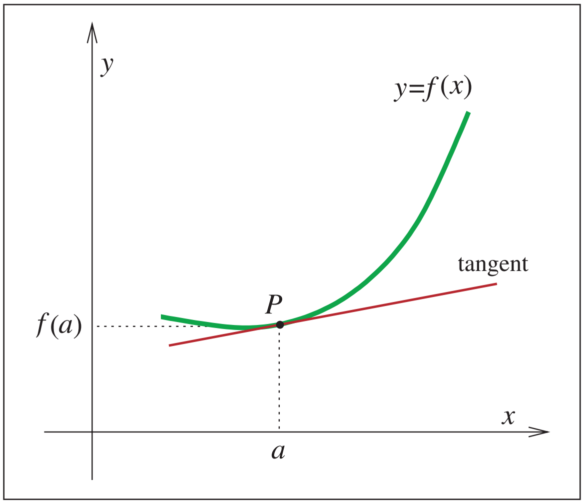

Fig. 4.4 Recta tangent a f en $(a, f(a))$

La idea clau és fer tendir $h \longrightarrow 0$, de manera que $Q \longrightarrow P$ i la recta secant tendirà a la recta tangent que volem (la tenim a la figura 4.4).

Aleshores, la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ tindrà pendent el límit dels pendents de les rectes secants anteriors quan $h \to 0$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Així, doncs, l'equació de la recta tangent buscada és $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ o, equivalentment,

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Observació 4.3 *Sabem que, si una recta té pendent m_1, aleshores qualsevol recta perpendicular a l'anterior té pendent $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$. Entenem que, si $m_1 = 0$, aleshores $m_2 = \infty$, i viceversa.*

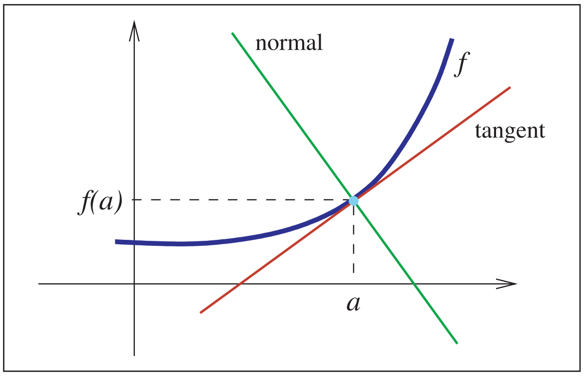

Fig. 4.5 Rectes tangent i normal a f en $(a, f(a))$

Sigui f una funció derivable en un punt a. La *recta normal* a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$ és

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a).$$

És a dir, la recta perpendicular a la tangent en el punt $(a, f(a))$ (com l'esquema de la figura 4.5).

Exemples 4.4

Derivada d'algunes funcions elementals. Estudiem la derivada d'algunes funcions a partir de la definició. Calculeu els límits següents:

a) Sigui la funció $f(x) = x^2$ amb $D = \mathbb{R}$. Prenem $a \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \qquad \text{(suma per diferència)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a.$$

Per tant, la funció $f(x) = x^2$ és derivable a tot $\mathbb{R}$ i la seva derivada és $f'(x) = 2x$.

Si mirem en uns punts concrets —com a la figura 4.6— tenim, per exemple,

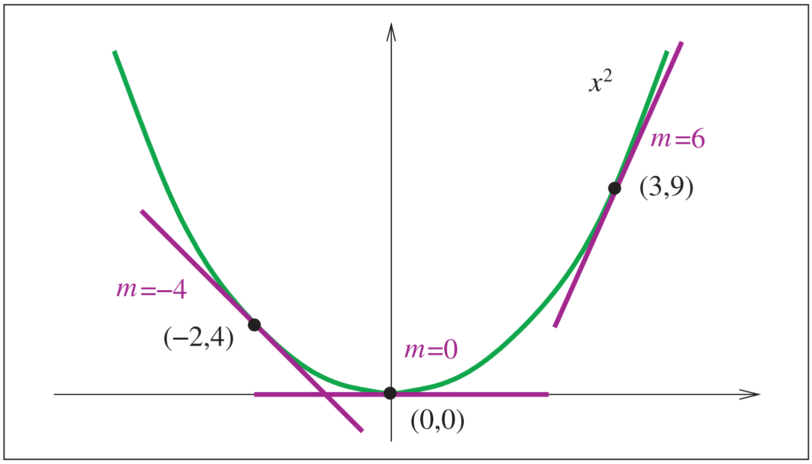

Fig. 4.6 Rectes tangents a $f(x) = x^2$ en diversos punts

5 Integració

5.1 La integral de Riemann. Propietats

En aquesta secció, generalitzem la idea d'àrea —tan intuïtiva per a quadrats, triangles, cercles...— a figures determinades per corbes al pla. Per fer-ho, hem d'estudiar la integració de funcions reals fitades en intervals tancats.

Construcció de la integral de Riemann

Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada.

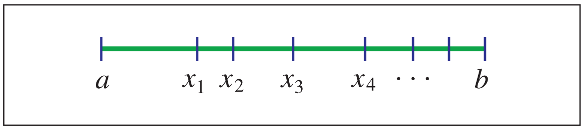

Fig. 5.1 Una partició de l'interval $[a,b]$

- Una *partició*, Π, de $[a,b]$ és un conjunt finit i ordenat de punts, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$, amb

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Els elements de la partició no són necessàriament equiespaiats, com es mostra a la figura 5.1.

Designem per $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ la longitud del i-èsim interval determinat per la partició. Atès que f és una funció fitada, podem considerar

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}.$$

La idea de la integral de Riemann és aproximar l'àrea sota la gràfica de f entre a i b mitjançant rectangles que tenen com a base els subintervals de la partició i com a altura els valors M_i o m_i. Definim

- *Suma superior* $S(f,\Pi) = \Delta x_1 M_1 + \Delta x_2 M_2 + \cdots + \Delta x_n M_n$,
- *Suma inferior* $s(f,\Pi) = \Delta x_1 m_1 + \Delta x_2 m_2 + \cdots + \Delta x_n m_n$.

Aquestes sumes corresponen a les àrees dels rectangles per excés i per defecte, respectivament (figura 5.2).

Fent un procés de pas al límit quan $\Delta x_i \to 0$, se n'obtenen les integrals superior i inferior.

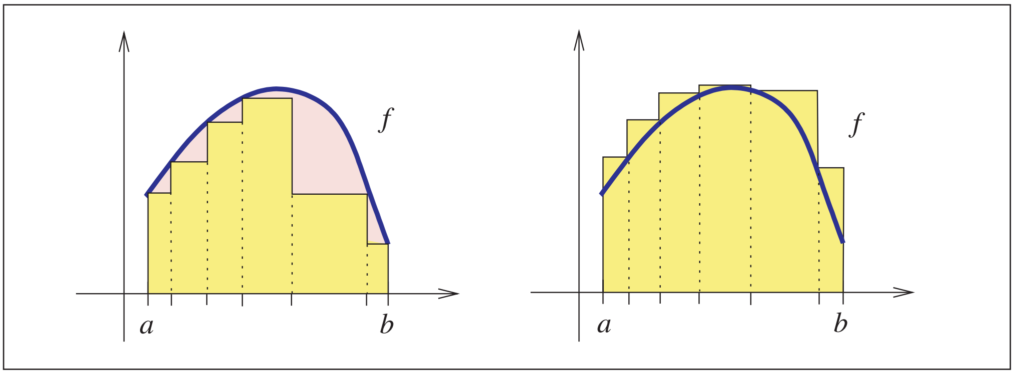

Fig. 5.2 Sumes inferior i superior

- *Integral superior* $\overline{\int_a^b} f = \inf_{\Pi} \{S(f,\Pi)\}$
- *Integral inferior* $\underline{\int_a^b} f = \sup_{\Pi} \{s(f,\Pi)\}$

Observació 5.1 *Clarament, la integral inferior de f sempre és més petita o igual que la integral superior de f, és a dir,* $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definició 5.2 Diem que f *és integrable en* $[a,b]$ *en sentit de Riemann* si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Aquest valor s'anomena *integral de f en* $[a,b]$ i el designem per $\int_a^b f$ o bé $\int_a^b f(x)\,dx$.

Es defineixen, a més, $\int_b^a f = -\int_a^b f$ i $\int_a^a f = 0$.

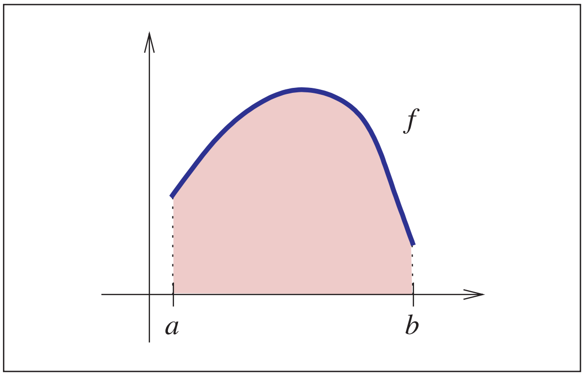

Fig. 5.3 Àrea sota la gràfica de f

Si $f(x) \geq 0$, la integral s'entén com l'àrea sota la gràfica de $f(x)$ fins a l'eix d'abscisses encabida entre $x = a$ i $x = b$, com es veu a la figura 5.3.

A partir d'ara, si f és integrable en el sentit de Riemann, diem simplement que f és integrable.

Exemples 5.3

Analitzem la integrabilitat d'un parell de funcions.

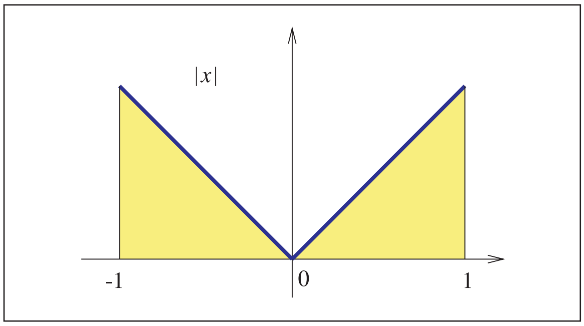

Fig. 5.4 L'àrea que determina $f(x) = |x|$ en $[-1,1]$

a) Sigui $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$. Estudiem si f és integrable i, en cas afirmatiu, calculem $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Per simetria (figura 5.4), considerem primer l'interval $[0,1]$ i la partició

$$\Pi = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right\}.$$

Llavors, obtenim:

$$s(f,\Pi) = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right) = \cdots = \frac{n-1}{2n}$$

$$S(f,\Pi) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right) = \cdots = \frac{n+1}{2n}$$

i, per tant,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}.$$

Aleshores, $\int_0^1 |x|\,dx = \frac{1}{2}$. Finalment, com que la gràfica de $f(x) = |x|$ és simètrica respecte de $x = 0$, resulta

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

b) Estudiem si la funció següent és integrable en $[0,1]$. $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Un esbós de la seva gràfica, juntament amb les corresponents integrals inferior i superior, es troben a la figura 5.5.

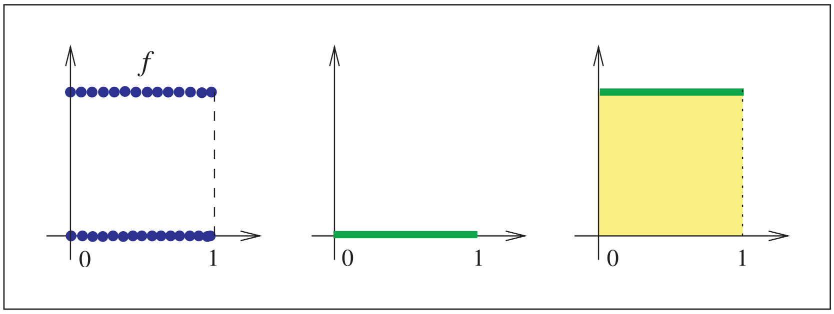

Fig. 5.5 Gràfica de $f(x)$. Integrals inferior i superior

6 Successions i sèries

6.1 Principi d'inducció matemàtica

En aquesta primera part, exposem un mètode per demostrar propietats que es presenten en termes dels nombres naturals; és el *principi d'inducció matemàtica*.

El problema consisteix a demostrar una determinada propietat $P(n)$ —que depèn dels nombres naturals— per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per exemple,

- $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ és múltiple de 9 per a tot $n \in \mathbb{N}$.
- El binomi de Newton, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$.
- $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on $(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 2$ i $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1$.

La idea clau és una propietat del conjunt $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}$: partint de l'1, podem arribar a qualsevol natural amb un nombre finit de passos, passant de n a $n+1$. Aquesta és la base de les demostracions per inducció. Vegem, doncs, com funciona.

> Principi d'inducció. Sigui $P(n)$ una proposició sobre n, per a cada $n \in \mathbb{N}$. Suposem que
>
> *a)* $P(1)$ és certa.
>
> *b)* $P(n)$ certa $\Longrightarrow P(n+1)$ certa.
>
> Aleshores, $P(n)$ és vertadera per a tot $n \in \mathbb{N}$.

En efecte, si es compleix *a)*, ja tenim el resultat per a $n=1$. Ara, per *b)*, com que $P(1)$ és vertadera, també ho és $P(2)$. Novament, aplicant la hipòtesi d'inducció, seran certes $P(3), P(4), \cdots$ i, així successivament, i se satisfà $P(n)$ per a tots els naturals.

A l'apartat *b)*, la hipòtesi "$P(n)$ és certa" s'anomena *hipòtesi d'inducció*.

Com a mostra, provem per inducció una igualtat i una desigualtat.

Exemple 6.1

Progressió geomètrica. Demostrem per inducció la fórmula següent per a $r \neq 1$:

$$1+r+r^2+r^3+\cdots r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es tracta de la suma dels $n+1$ primers termes d'una progressió geomètrica de primer element 1 i *raó* r. En comprovem les dues condicions.

a) $n=1$. Vegem si la propietat és certa per a $n=1$: $1+r \stackrel{?}{=} \dfrac{1-r^2}{1-r}$. En efecte,

$$\frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1+r)(1-r)}{1-r} = 1+r.$$

b) $P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)$. Suposem que la fórmula és vàlida per a n i veiem que també se satisfà per a $n+1$. La nostra hipòtesi d'inducció és, doncs, $1+r+r^2+r^3+\cdots r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ i volem demostrar que, llavors, $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n+1} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$. Tenim, per hipòtesi d'inducció,

$$\begin{aligned} 1+r+r^2+r^3+\cdots r^n + r^{n+1} &= \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \quad \text{(i fent els càlculs)} \\ &= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r} \end{aligned}$$

com volíem veure.

Suposem que tenim la progressió geomètrica

$$a+ar+ar^2+ar^3\cdots+ar^n$$

de primer terme a i raó r, en comptes de l'anterior. Per calcular-ne la suma, només cal treure factor comú la a i aplicar-hi el resultat anterior:

$$a\left(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n\right) = a\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Exemple 6.2

Una desigualtat. Demostrem que se satisfà $2^{n-1} \leq n!$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

a) $n=1$. La desigualtat és certa per als primers naturals:

$$\begin{aligned} n=1 &\quad\to\quad 0 \leq 1, \\ n=2 &\quad\to\quad 2 \leq 2, \\ n=3 &\quad\to\quad 4 \leq 12\cdots \end{aligned}$$

b) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Suposem que es compleix $2^{n-1} \leq n!$ (hipòtesi d'inducció) i veurem que $2^n \leq (n+1)!$ també és cert. Multipliquem la hipòtesi d'inducció per 2 a cada banda de la desigualtat i el signe $\leq$ no varia (perquè 2 és positiu). Si tenim en compte que $2 \leq n+1$ per a cada $n \in \mathbb{N}$, resulta

$$2^{n-1} \leq n! \implies 2^n \leq 2n! \implies (n+1)n! \implies 2^n \leq (n+1)!$$

com volíem provar.

Eventualment, podem trobar-nos amb una propietat per demostrar, però no per a tot $n \in \mathbb{N}$, sinó per a $n \geq n_0$, amb un determinat $n_0 \in \mathbb{N}$. Per exemple, per a $n \geq 4$ —en aquest cas, no ens interessa o no és certa la propietat per a $n = 1, 2, 3$. Tanmateix, el principi d'inducció funciona com abans, llevat de l'apartat *a)*. En aquest cas, es tracta de comprovar

a) $P(n_0)$ és certa i

b) $P(n)$ certa $\Longrightarrow P(n+1)$ certa.

6.2 Successions de nombres reals

En aquesta secció, estudiem les col·leccions infinites i ordenades de nombres, és a dir, les successions.

Definició 6.3 Una *successió de nombres reals* és una aplicació del conjunt dels nombres naturals en $\mathbb{R}$, és a dir,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \varphi(n) = x_n \end{aligned}$$

Intuïtivament, una successió en $\mathbb{R}$ correspon a una col·lecció infinita de cel·les numerades (amb les etiquetes ordenades $n = 1, 2, 3, \ldots$) i, en cada una d'elles hi col·loquem un nombre real. En tenim l'esbós a la figura 6.1.

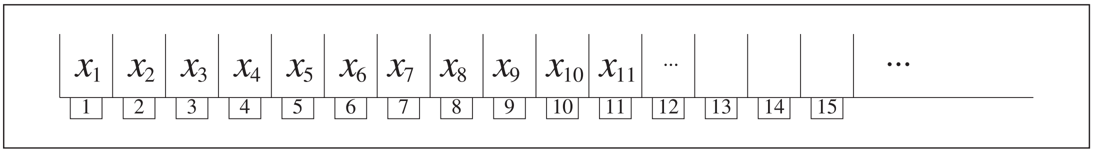

Fig. 6.1 Elements d'una successió

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ 1 &\longmapsto \varphi(1) = x_1 \quad \text{(a la primera casella, hi ha un número } x_1\text{)} \\ 2 &\longmapsto \varphi(2) = x_2 \quad \text{(a la segona casella, hi ha un número } x_2\text{)} \\ &\vdots \\ n &\longmapsto \varphi(n) = x_n \quad \text{(a l'enèsima casella, hi ha un número } x_n\text{)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Designem la nostra successió per (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, $(x_n)_{n \geq 1}$ i, evidentment, amb altres lletres: (y_n), (z_n), (a_n), (b_n), etc.

Els nombres x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n, \ldots$ s'anomenen els elements o termes de la successió i (x_n) en representa el terme general. Cal remarcar que hem de distingir entre la successió —els seus elements— i la imatge —recorregut o rang— de l'aplicació. Per exemple, la successió $0,2,0,2,0,2,0,2,\ldots$ seria $\left(1+(-1)^n : n \in \mathbb{N}\right)$, mentre que la imatge de l'aplicació que genera la successió és $\{0,2\}$.

Exemples 6.4

Vegem diferents exemples de successions i maneres de donar-les.

a) Successió dels nombres parells. Podem escriure la llista d'uns quants elements:

$$2,4,6,8,10,12,14,16,\ldots$$

També podem considerar el terme general de la successió

$$x_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) *Successió de Fibonacci*.

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1},\ n \geq 2.$$

Aquesta successió ve definida mitjançant una llei de recurrència, és a dir, cada terme —excepte els primers— s'obté a partir dels anteriors. Així, queda

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ldots$$

Operacions amb successions

Amb les successions, es poden realitzar les operacions algebraiques elementals. La suma, la diferència, el producte i el quocient de dues successions es fan terme a terme.

Definició 6.5 Siguin (x_n) i (y_n) dues successions en $\mathbb{R}$. Definim les operacions següents.

- *Suma*: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$.
- *Diferència*: $(x_n) - (y_n) = (x_n - y_n)$.
- *Producte*: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$.
- *Producte per un escalar*: $\lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Quocient*: $\dfrac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, si $y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{R}$.

Exemples 6.6

Un parell d'operacions.

a) Siguin
$$\begin{aligned} (x_n) &= 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \ldots \\ (y_n) &= 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots \end{aligned}$$

Aleshores,

$$(x_n)+(y_n)=3,5,8,11,15,20,27,37,52,\ldots$$

b) Siguin les successions $x_n=1+(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$ i $y_n=n$, $n\in\mathbb{N}$. Llavors,

$$\frac{(x_n)}{(y_n)}=0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{5},\ldots$$

Límit d'una successió

Ens interessa conèixer el comportament de les successions quan n es fa gran. Per això, tindrem en compte un nou concepte, el de límit.

Definició 6.7 Sigui (x_n) una successió de nombres reals. Diem que (x_n) *té límit* $x\in\mathbb{R}$ si, per a cada $\varepsilon>0$, existeix $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_n-x|<\varepsilon,\quad \text{per a tot } n\geq n_0.$$

En aquest cas, diem que (x_n) *és una successió convergent cap a* x.
Si una successió no té límit, s'anomena *divergent*.

Quan (x_n) té límit x, ho escriurem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n}x_n=x$, o bé $x_n\to x$.

Observació 6.8 Unicitat del límit. *Sigui (x_n) una successió en $\mathbb{R}$ amb límit. Aleshores, (x_n) té un únic límit.*

Demostració. Suposem que la successió (x_n) té dos límits diferents: x i x'. Sigui $d=|x-x'|$ la distància entre ambdós límits. Considerem $\varepsilon=\dfrac{d}{2}>0$. Com que x és límit de la successió, existeix un $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n-x|<\varepsilon$ si $n\geq n_1$. Anàlogament, com que x' és límit de la successió, existeix un $n_2\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n-x'|<\varepsilon$ si $n\geq n_2$. Sigui n_0 el màxim de n_1 i n_2. Llavors,

$$|x_n-x|<\varepsilon \text{ i } |x_n-x'|<\varepsilon \text{ si } n\geq n_0.$$

Aleshores, tenim per a $n\geq n_0$,

$$d=|x-x'|=|x-x_n+x_n-x'|\leq|x-x_n|+|x'-x_n|<\varepsilon+\varepsilon=d.$$

Hem obtingut un absurd: $d<d$. Aquesta contradicció prové de suposar que $x\neq x'$; per tant, el límit és únic. □

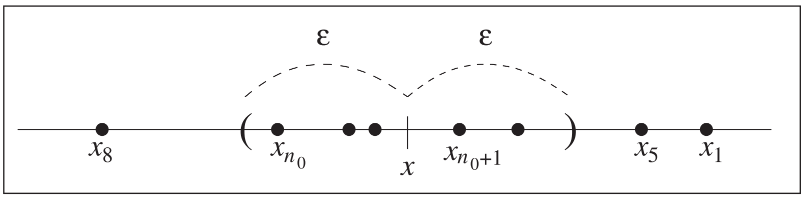

Fig. 6.2 Límit d'una successió

7 Conceptes previs

L'objectiu fonamental d'aquest capítol és refrescar alguns conceptes ja adquirits en cursos anteriors. L'enfocament és totalment pràctic. Inclou un test inicial que permetrà a l'estudiant, un cop l'hagi realitzat, decidir quins aspectes ha de repassar amb més intensitat.

En destaquem cinc grans àrees:

Polinomis i equacions: inclou bàsicament el desenvolupament d'expressions algebraiques, l'extracció de factor comú, les operacions amb polinomis i la resolució d'equacions.

Geometria elemental: comprèn la semblança de polígons, àrees de figures planes i les àrees i els volums de sòlids regulars.

Trigonometria plana: engloba les raons trigonomètriques (sinus, cosinus...), la resolució d'equacions trigonomètriques i de triangles.

Geometria analítica plana: recorda les diferents equacions d'una recta, la perpendicularitat i el paral·lelisme, i estudia les equacions i els elements principals de les còniques.

Derivades i integrals: es recorda el càlcul de derivades i el de primitives.

Objectius

Una vegada desenvolupat el capítol, l'estudiant ha de ser capaç de:

- Manipular adequadament les principals operacions algebraiques.
- Calcular àrees i perímetres de figures elementals.
- Determinar àrees i volums de sòlids regulars.
- Conèixer les raons trigonomètriques dels angles notables.
- Conèixer les principals identitats trigonomètriques.
- Resoldre triangles rectangles i obliquangles.
- Resoldre equacions trigonomètriques senzilles.
- Conèixer les equacions de la recta.
- Calcular l'angle entre dues rectes.
- Conèixer les equacions reduïdes de les còniques.
- Identificar els elements principals de les còniques.
- Calcular derivades aplicant la regla de la cadena.
- Calcular primitives *immediates*.

7.1 Test inicial

Problema 1

Un pal de 2 m projecta una ombra d'$1'5$ m. L'altura d'un arbre que a la mateixa hora projecta una ombra de $3'5$ m és de:

a) 4 m

b) $4'7$ m

c) $5'5$ m

d) 6 m

e) $3'75$ m

Problema 2

El costat d'un triangle equilàter mesura 2 cm. L'àrea és de:

a) $1\ \mathrm{cm}^2$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}^2$

c) $\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

d) $\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$

e) $4\ \mathrm{cm}^2$

Problema 3

El volum d'un cilindre de radi 5 cm i altura 10 cm és:

a) $125\pi\ \mathrm{cm}^3$

b) $100\pi\ \mathrm{cm}^3$

c) $50\pi\ \mathrm{cm}^3$

d) $500\pi\ \mathrm{cm}^3$

e) $250\pi\ \mathrm{cm}^3$

Problema 4

L'equació de la recta que passa pel punt $(1,1)$ i té pendent 5 és:

a) $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

b) $y = 5x - 4$

c) $y = -5x + 6$

d) $y = x + 5$

e) $y = x + 1$

Problema 5

Tant la fórmula de la *gravitació universal de Newton* com la de *l'atracció elèctrica de Coulomb* tenen l'estructura $F = C\dfrac{ab}{d^2}$. El valor de F expressat en notació científica per al cas $C = 9 \cdot 10^9$, $d = 3 \cdot 10^{-4}$ i $a = b = 4 \cdot 10^{-5}$ és:

a) $16 \cdot 10^{-9}$

b) $16 \cdot 10^{7}$

c) $1'6 \cdot 10^{8}$

d) $4 \cdot 10^{-10}$

e) $12 \cdot 10^{-9}$

Problema 6

El resultat de desenvolupar i simplificar l'expressió $(2x^2 + x^3)^2$ és:

a) $x^9 + 4x^5 + 2x^4$

b) $x^6 + 4x^4$

c) $x^6 + 2x^4$

d) $x^6 + 4x^5 + 4x^4$

e) $x^9 + 4x^4$

Problema 7

El desenvolupament de $(1-x)^3$ és:

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

b) $-x^3 + 1$

c) $x^3 - x^2 - x + 1$

d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

e) $x^6 - 1$

Problema 8

En simplificar el màxim possible la fracció $\dfrac{xy - x^2}{xy^2 - x^3}$, obtenim

a) $y - x$

b) $\frac{1}{y-x}$

c) 0

d) $y + x$

e) $\frac{1}{y+x}$

Problema 9

La derivada de $y = \cos^3 4x$ és:

a) $-12\sin^2 4x$

b) $4\sin^3 4x$

c) $3\cos^2 4x$

d) $-3\cos^2 4x$

e) $-12\cos^2 4x \cdot \sin 4x$

Problema 10

El valor de la integral $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$ és:

a) $\text{arctg}\,(x^2+5)+C$, on C és una constant.

b) $\ln(x^2+5)+C$, on C és una constant.

c) $\arcsin(x^2+5)+C$, on C és una constant.

d) $(x^2+5)^3+C$, on C és una constant.

e) No es pot integrar.

7.2 Polinomis i equacions

Continguts:

- Propietats de les potències i de les operacions.
- Binomi de Newton. Nombres combinatoris.
- Operacions amb fraccions i amb arrels.
- Equacions de segon grau, biquadrades i irracionals.
- Operacions amb polinomis.

Breu resum teòric

Propietats de les potències.

Si $a \in \mathbb{R}$ i $n, m \in \mathbb{R}$, llavors es compleix que:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ amb $a \geq 0$

Binomi de Newton. Nombres combinatoris

Recordem que

$$\begin{aligned}(a\pm b)^2 &= a^2\pm 2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\\ (a\pm b)^3 &= a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.\end{aligned}$$

En general, si $n\in\mathbb{N}$, es té

$$(a\pm b)^n=\binom{n}{0}a^n\pm\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\pm\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

Encara que no amb aquesta notació, Tartaglia ja coneixia aquest desenvolupament. De fet, Newton va demostrar que la igualtat anterior és vàlida per als enters i per als racionals. Posteriorment, Euler la justificà també per als irracionals. Ara és coneguda com el binomi de Newton.

L'expressió $\binom{m}{n}$ s'anomena *nombre combinatori* i es defineix com

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!},\qquad \text{on}\qquad k!=k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Recordem que, per definició, $0!=1$ i que $\binom{m}{n}$ indica el nombre de subconjunts de n elements que hi ha en un conjunt de m elements.

Observant l'expressió del binomi de Newton, veiem que:

- La suma dels exponents de a i de b en cada terme és n.
- Els coeficients del desenvolupament de Newton són els nombres combinatoris de les distintes files del *triangle de Tartaglia-Pascal*:

$$\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}\\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

o bé,

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1\\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & &
\end{array}$$

8 Solucions dels problemes

8.1 Els nombres

Problema 1

a) $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

b) $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]$

c) $\emptyset$, no té solució.

d) $(-\infty,-1)\cup(3,7)$

Problema 2

a) $[-2,-1)$

b) $(0,1)$

Problema 3

a) $(-\infty,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)$

b) $(-\infty,-2)$

Problema 4

$\lambda\in(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$

Problema 5

$z_1=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}\,i$ i $z_2=-6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\,i$.

Problema 6

a) La suma de les arrels val 0 i el producte, 16.

b) $P(z)=(z^2-2z+4)\,(z^2+2z+4)$

Problema 7

Indicació: preneu $z = a + bi$, amb $a^2 + b^2 = 1$.

Problema 8

$$4\left(z - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-2}{4}\,i\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+2}{4}\,i\right)$$

Problema 9

Són els complexos que formen la circumferència de centre 1 i radi 2.

8.2 Funcions

Problema 1

a) Tots els nombres reals.

b) Tots els nombres reals.

c) Tots els nombres reals menys el 3.

d) Tots els nombres reals menys el 2 i el -2.

e) $[-2, +\infty)$

f) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

g) Tots els nombres reals.

h) $[-\frac{3}{2}, +\infty) \setminus \{5\}$

i) $(-\frac{5}{3}, +\infty)$

j) $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

k) Tots els nombres reals.

Problema 2

$[3, 5]$

Problema 3

$\mathrm{Dom}(f) = [2,3] \cup [4,5]$, $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$

Problema 4

a) 3

b) $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$

c) 3

d) 1