

**AULA POLITÈCNICA
/ MATEMÀTICAS Y ESTADÍSTICA**

**I. Arias - J. Gibergans - F. Ikhouane
N. Parés - F. Pozo - G. Pujol - Y. Vidal**

Càlculo avanzado para ingeniería

Teoría, problemas resueltos y aplicaciones

I. Arias - J. Gibergans - F. Ikhouane,
N. Parés - F. Pozo - G. Pujol - Y. Vidal

Cálculo avanzado para ingeniería

Teoría, problemas resueltos y aplicaciones

Primera edición: febrero de 2008

Diseño de la cubierta: Jordi Calvet

© los autores, 2008

© Edicions UPC, 2008
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 137 540 Fax: 934 137 541
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.edu

ISBN: 978-84-9880-345-7

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Índice general

Notaciones matemáticas	11
Prólogo	13
1. Funciones vectoriales de varias variables reales	15
1.1. Introducción y primeras definiciones: funciones vectoriales y funciones escalares	15
1.1.1. Funciones escalares de varias variables reales	15
1.2. Topología, límites y continuidad	15
1.2.1. Entornos	18
1.2.2. Límite de funciones vectoriales	19
1.2.3. Método práctico para determinar límites de funciones	21
1.2.4. Continuidad de funciones de varias variables	22
1.2.5. Funciones vectoriales de varias variables reales	23
1.3. Derivadas parciales, diferencial total y matriz jacobiana	24
1.4. Funciones diferenciables	27
1.5. Derivadas de funciones compuestas: regla de la cadena	30
1.5.1. Derivadas parciales de orden superior	31
1.6. Desarrollo en serie de Taylor de una función de varias variables	31
1.6.1. Fórmula de Taylor para funciones de varias variables	32
1.6.2. Fórmula de Taylor de primer orden	33
1.6.3. Fórmula de Taylor de segundo orden	33
1.7. Problemas resueltos	33
1.8. Problemas propuestos	56
2. Extremos de funciones	59
2.1. Definiciones y teorema principal	59
2.1.1. Definiciones	59
2.1.2. Cálculo de extremos relativos	61
2.2. Extremos condicionados	66
2.2.1. Multiplicadores de Lagrange	66
2.2.2. Resolución del problema de extremos condicionados	67
2.3. Problemas resueltos	69
2.4. Problemas propuestos	92
3. Integral múltiple y aplicaciones	93
3.1. Introducción: Integral simple	93
3.1.1. Idea para aproximar el área superiormente	94
3.1.2. Idea para aproximar el área inferiormente	94
3.1.3. Integrable en el sentido de Riemann	94
3.1.4. Regla de Barrow	95

3.2.	Integral doble	95
3.2.1.	Idea para aproximar el volumen superiormente	97
3.2.2.	Idea para aproximar el volumen inferiormente	97
3.2.3.	Integral doble	97
3.2.4.	Cálculo de la integral doble en regiones rectangulares	97
3.2.5.	Cálculo de la integral doble sobre regiones más generales	98
3.3.	Integral triple	101
3.3.1.	Motivación	101
3.3.2.	Cálculo de integrales triples sobre regiones en forma de paralelepípedo	101
3.3.3.	Cálculo integral triple sobre regiones más generales	101
3.4.	Integración por cambio de variable	102
3.4.1.	Motivación	102
3.4.2.	Cambio de variable en una integral doble	103
3.4.3.	Cambio de variable en una integral triple	103
3.4.4.	Cambios de variable usuales	103
3.5.	Aplicaciones	105
3.5.1.	Valor promedio	105
3.5.2.	Centro de masa	105
3.5.3.	Momento de inercia	106
3.6.	Problemas resueltos	106
3.7.	Problemas propuestos	124
4.	Ecuaciones diferenciales ordinarias	127
4.1.	Ejemplo introductorio	127
4.2.	Ecuaciones diferenciales de primer orden	128
4.2.1.	Primeras definiciones	128
4.2.2.	Ecuaciones diferenciales de variables separables	130
4.2.3.	Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales	130
4.2.4.	Problemas de modelado	131
4.3.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden	134
4.3.1.	Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes	136
4.3.2.	Problemas de modelado	140
4.4.	Sistemas de ecuaciones diferenciales	142
4.5.	Problemas resueltos	144
4.6.	Problemas propuestos	156
5.	Análisis vectorial	159
5.1.	Curvas y trayectorias	159
5.2.	Campos vectoriales	164
5.3.	Divergencia y rotacional	169
5.4.	Integrales sobre trayectorias	171
5.5.	Teorema de Green	175
5.6.	Problemas resueltos	179
5.7.	Problemas propuestos	199

6. Cálculo operacional	203
6.1. Transformada de Laplace. Transformada inversa. Linealidad	203
6.2. Transformada de la derivada. Resolución de ecuaciones diferenciales	207
6.3. Transformada de Laplace de la integral	209
6.4. Traslación en s , función escalón unitario, traslación en t	210
6.4.1. Traslación en s	210
6.4.2. Función escalón unitario	210
6.4.3. Traslación en t	210
6.5. Convolución	212
6.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales	213
6.7. Transformada de Fourier	213
6.8. Problemas resueltos	214
6.9. Problemas propuestos	224
Bibliografía	227

Lista parcial de notaciones matemáticas

Alfabeto griego

A	α	alfa	B	β	beta	Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta	E	ϵ, ε	épsilon
Z	ζ	zeta	H	η	eta	Θ	θ, ϑ	theta	I	ι	iota	K	κ	kappa
Λ	λ	lambda	M	μ	mu	N	ν	nu	Ξ	ξ	xi	O	o	ómicron
Π	π, ϖ	pi	P	ρ, ϱ	ro	Σ	σ, ς	sigma	T	τ	tau	Υ	v	ípsilon
Φ	ϕ, φ	fi	X	χ	ji	Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega			

Conjuntos importantes

\emptyset	conjunto vacío	
\mathbb{N}	números naturales	$\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{N}^*	números naturales diferentes de cero	$\{1, 2, \dots\}$
\mathbb{Z}	números enteros	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Q}	números racionales	$\{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\}$
\mathbb{R}	números reales	$(-\infty, +\infty)$
\mathbb{R}^+	números reales positivos	$[0, +\infty)$
\mathbb{C}	números complejos	$\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ (i verifica $i^2 = -1$)

Operadores lógicos

\forall	para todo	$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$
\exists	existe	$\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 7$
$\exists!$	existe un solo	$\exists! n \in \mathbb{N}, n < 1$
\wedge	y	$(3 > 2) \wedge (2 > 1)$
\vee	o	$(2 > 3) \vee (2 > 1)$
\Rightarrow	implica	$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a = b) \Rightarrow (a \geq b)$
\Leftrightarrow	si, y sólo si	$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a = b) \Leftrightarrow (b = a)$
\neg	negación	$\neg(2 > 3)$
	otras notaciones para la negación	$(2 > 3), 2 \not> 3$

Operadores aritméticos

$ $	valor absoluto	$ x = x$ si $x \geq 0$; $ x = -x$ si $x \leq 0$
\sum	suma	$\sum_{i \in \mathbb{N}^+} 2^{-i} = 1$
\prod	producto	$\prod_{i=1}^n i = n!$
$!$	factorial	$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

Operadores sobre conjuntos

\in	pertenece	$a \in \{a, b, c\}$
\cup	unión	$\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$
	... sobre un conjunto indexado	$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$
\cap	intersección	$\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$
	... sobre un conjunto indexado	$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i = S_0 \cap S_1 \cap S_2 \cap \dots$
\setminus	diferencia entre conjuntos	$\{a, b, c\} \setminus \{a, d\} = \{b, c\}$
\supset	contiene estrictamente	$\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$
\supseteq	contiene	$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}$
\subset	está contenido estrictamente en	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
\subseteq	está contenido en	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$
2^A	potencia de A	si $A = \{a, b, c\}$, entonces $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

Prólogo

Este libro es el reflejo de la experiencia docente en asignaturas de cálculo de siete profesores de la Universitat Politècnica de Catalunya. El texto sigue el esquema básico de la asignatura troncal *Fundamentos matemáticos de la ingeniería 2*, que imparten los autores en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona, pero su contenido es perfectamente adaptable para cursos de cálculo en varias variables de cualquier ingeniería. El texto tiene como objetivo principal iniciar al estudiante en los conceptos básicos del cálculo de funciones de varias variables, análisis vectorial y ecuaciones diferenciales, así como en la teoría de transformadas. Para el estudio de este texto, se supone que el alumno ya ha adquirido nociones básicas de matrices, así como suponemos un amplio conocimiento de los fundamentos de funciones de una variable, diferenciación e integración.

Al ser un texto dirigido a estudiantes de ingeniería, se han cuidado los aspectos de aplicación, justificando los conceptos introducidos mediante ejemplos prácticos y motivaciones de las ciencias físicas tales como electricidad, electrónica y mecánica, en las que se aplican los conocimientos adquiridos.

El libro, que consta de seis capítulos, se puede dividir en dos partes. La primera parte está dedicada a las funciones de varias variables: nociones básicas de límite, continuidad y derivación; cálculo de extremos libres y condicionados; integración múltiple y análisis vectorial. La segunda parte trata las ecuaciones diferenciales de primer orden y orden superior, la transformada de Laplace y la transformada de Fourier.

Para ilustrar la teoría, se presentan ejemplos aplicados a la ingeniería, así como problemas resueltos y problemas propuestos que permiten al lector verificar sus conocimientos. La experiencia en la docencia de esta materia muestra que es preferible omitir algunas demostraciones técnicas. En este sentido, hemos mantenido las que consideramos que, efectivamente, permiten una mejor comprensión de los aspectos teóricos.

Al final de cada uno de estos capítulos, junto a los listados de ejercicios, se encuentra una recopilación de problemas resueltos utilizando el programa de cálculo simbólico Maple. De esta manera, se presentan al estudiante todos los comandos y herramientas necesarios para la resolución de problemas, con especial énfasis en las capacidades gráficas y de representación de dicho programa.

Queremos mostrar nuestro agradecimiento a la Universitat Politècnica de Catalunya y a la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona por acoger nuestro trabajo de estos años, así como a José Rodellar, director del Departamento de Matemática Aplicada III, por su apoyo y confianza.

1 Funciones vectoriales de varias variables reales

En la primera parte de este primer capítulo (Secciones 1.1 y 1.2) se presentan las nociones básicas que permiten definir el concepto de límite. Estos conceptos son los de producto escalar, norma y distancia. El límite de una función vectorial en un punto es un concepto fundamental, al igual que en el caso de funciones reales de variable real, ya que nos permitirá definir las derivadas direccionales y la diferenciabilidad. Se presenta asimismo un método práctico para determinar límites de funciones. La continuidad de funciones vectoriales de varias variables también se define a partir de un límite.

En la segunda parte (Secciones 1.3 a 1.6) se definen las derivadas direccionales –que en la dirección de los ejes dan lugar a las derivadas parciales– y el concepto de diferenciabilidad, con algunas diferencias destacables con respecto a las funciones reales de variable real. Finalmente, se presenta el polinomio de Taylor para funciones de varias variables reales, que permitirá obtener aproximaciones locales polinómicas de funciones alrededor de un punto.

1.1. Introducción y primeras definiciones: funciones vectoriales y funciones escalares

1.1.1. Funciones escalares de varias variables reales

Considérese un sistema masa-resorte. La energía total del sistema viene dada por la expresión

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

donde m representa a la masa, v la velocidad, k la constante del resorte y x su elongación.

En un circuito RLC, la energía almacenada es

$$E_2 = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

donde C representa la constante del condensador, L la inductancia de la bobina, i la corriente eléctrica y u el voltaje a nivel del condensador.

En ambos casos, E_1 y E_2 pueden considerarse como funciones de 2 variables: (v, x) en el primer caso y (u, i) en el segundo caso. De forma más precisa, se puede escribir

$$E_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

donde $j = 1, 2$.

Más generalmente se pueden definir funciones escalares de varias variables reales, es decir, definidas de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y funciones vectoriales de varias variables reales de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

1.2. Topología, límites y continuidad

Para definir los conceptos de límite y establecer la continuidad de funciones de varias variables, es necesario establecer algunas nociones acerca de la topología del espacio \mathbb{R}^n , como son el producto escalar, norma y distancia.

De esta manera, podremos hablar de \mathbb{R}^n como espacio euclídeo, en el que podremos calcular la distancia entre sus elementos, que llamaremos vectores.

Definición 1 (Conjunto \mathbb{R}^n). Se define el conjunto \mathbb{R}^n donde $n \in \mathbb{N}$ como

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Los elementos de \mathbb{R}^n se denotan por \mathbf{x} para diferenciarlos de x , que generalmente representa un número real.

Propiedad 1. El conjunto \mathbb{R}^n , junto con las operaciones de suma de vectores $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y producto por escalar \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas como

- (i) $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- (ii) $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n .

Para poder dotar al espacio \mathbb{R}^n de una estructura geométrica, es necesario introducir los conceptos de producto escalar, norma y distancia.

Definición 2 (Producto escalar). Un producto escalar en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

que a cada par de vectores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ les asocia un número real $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$. Además, esta aplicación ha de satisfacer las siguientes propiedades:

- (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (simetría del producto escalar)
- (iii) $\langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$
- (iv) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Ejemplo 1. Un primer ejemplo de producto escalar es el que corresponde a la aplicación

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Puede comprobarse fácilmente que esta aplicación es, en efecto, un producto escalar.

- (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^2 = 0, \forall i \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- (iii) $\langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i) y_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$
- (iv) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^n (x_i z_i + y_i z_i) = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Definición 3 (Norma). Una norma en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{x} &\rightarrow \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

que a cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ le asocia un número real no negativo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}^+$. Además, esta aplicación ha de satisfacer las siguientes propiedades:

- (i) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- (iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad triangular)

Definición 4 (Norma euclídea). Se define la norma euclídea (o norma 2) de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

La norma euclídea de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ no es más que la longitud del segmento que une el origen de coordenadas ($\mathbf{0}$) de \mathbb{R}^n con el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ejemplo 2. Veamos la norma euclídea de algunos vectores:

- (i) $\|(3, 4)\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- (ii) $\|(2, -1, 3)\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Nota 1. Pueden definirse muchas otras normas. Entre ellas, las más conocidas son la norma 1 y la norma infinito, definidas como

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Nota 2. De forma más general, dado un producto escalar cualquiera, se puede definir una norma como sigue:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

Definición 5 (Distancia). Una distancia en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

que a cada par de vectores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ les asocia un número real no negativo $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^+$. Además, esta aplicación ha de satisfacer las siguientes propiedades:

- (i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- (ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetría de la distancia)
- (iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdad triangular)

Definición 6 (Distancia euclídea). Se define la distancia euclídea $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ entre los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, como

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

La distancia euclídea de entre dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} no es más que la norma euclídea (o longitud) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ del vector diferencia $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Ejemplo 3. Veamos la distancia euclídea entre algunos pares de vectores:

- (i) $d_2((2, 1), (4, 2)) = \sqrt{(2-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

2 Extremos de funciones

El estudio de maximizar o minimizar una función real de varias variables o campo escalar $y = f(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, se asemeja al cálculo de extremos para una función real de una variable real. En este capítulo se extienden las técnicas de estudio de los valores extremos de una función de una sola variable a funciones de varias variables, estudiando tres tipos de extremos: relativos, absolutos y condicionados. Los extremos relativos son aquellos puntos \mathbf{x}_0 tales que, para todo \mathbf{x} suficientemente cercano a \mathbf{x}_0 , la imagen $f(\mathbf{x}_0)$ es mayor o menor que $f(\mathbf{x})$. No se afirma nada para \mathbf{x} lejano a \mathbf{x}_0 . Ser extremo relativo es una propiedad local. Además, dichos extremos no tienen por qué ser únicos y pueden no existir.

En cambio, los extremos absolutos sí que verifican cierta propiedad global. Es decir, si se considera una región dada D , verificando ciertas propiedades, resulta \mathbf{x}_0 es extremo absoluto en D si para todo $\mathbf{x} \in D$, $f(\mathbf{x}_0)$ es el mayor o menor de todos los valores $f(\mathbf{x})$, con \mathbf{x} en D . Se verá qué tiene que verificar esta región D para poder asegurar su existencia, y así calcularlos. Se demostrará que siempre existen este tipo de extremos en D y que si bien $f(\mathbf{x}_0)$ es única, pueden existir varios valores de \mathbf{x}_0 con la misma imagen (basta pensar en una función constante).

Finalmente, los extremos condicionados son aquellos que si bien maximizan o minimizan una función $f(\mathbf{x}_0)$ dada, están sujetos a verificar cierta ecuación $g(\mathbf{x}) = 0$. Dicha ecuación $g(\mathbf{x}) = 0$ también se llama *condición* o *ligadura*, ya que impone una relación entre las componentes de la variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.1. Definiciones y teorema principal

En esta sección se explica cómo encontrar los extremos relativos, dando reglas o fórmulas que permitan el cálculo efectivo de estos extremos. Pero antes se necesitan ciertas definiciones.

2.1.1. Definiciones

Se presenta a continuación las definiciones de extremos relativos y absolutos de una función escalar de variables reales (ver figura 2.1).

Definición 23 (Extremos). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar dada. Se dice que $\mathbf{x}_0 \in U$ es un extremo (mínimo o máximo) de f si se verifican una de las dos condiciones siguientes:

1. Existe un entorno $V \subset U$ de \mathbf{x}_0 tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$. En este caso, el punto \mathbf{x}_0 se denomina **máximo relativo o local** de f . Si esta desigualdad se verifica por todo $\mathbf{x} \in U$, se dice que el punto \mathbf{x}_0 es un **máximo absoluto o global** de f .
2. Existe un entorno $V \subset U$ de \mathbf{x}_0 tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. En este caso, el punto \mathbf{x}_0 se denomina **mínimo relativo o local** de f . Si esta desigualdad se verifica por todo $\mathbf{x} \in U$, se dice que el punto \mathbf{x}_0 es un **mínimo absoluto o global** de f .

Definición 24 (Punto crítico). Sea f una función diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que \mathbf{x}_0 es un **punto crítico** de f si $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$, es decir, si el gradiente de f se anula en \mathbf{x}_0 .

Definición 25 (Punto de silla). Un punto crítico que no sea un extremo relativo se llama **punto de silla**.

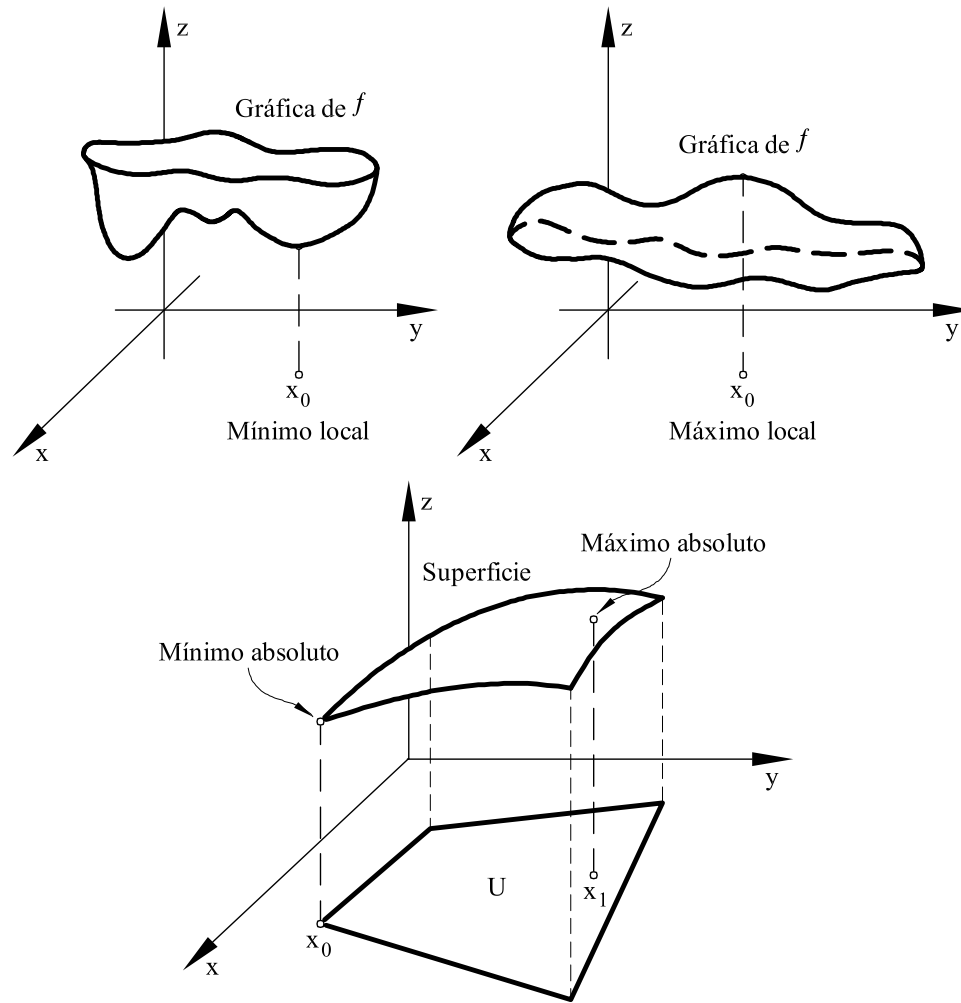


Figura 2.1. Ilustración de extremos

Definición 26 (Matriz definida negativa). Sea A una matriz simétrica $n \times n$. Se dice que A es **definida negativa**, y se nota por $A < 0$ si para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, se cumple que $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$.

Definición 27 (Matriz definida positiva). Sea A una matriz simétrica $n \times n$. Se dice que A es **definida positiva**, y se nota por $A > 0$ si para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, se cumple que $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$.

2.1.2. Cálculo de extremos relativos

Se sabe, por el capítulo 1, que una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$, abierto de \mathbb{R}^n , puede ser aproximada alrededor de este punto mediante un desarrollo de Taylor:

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.1)$$

Si se supone que \mathbf{x}_0 es un máximo relativo de la función f , entonces se tiene que tener $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo punto \mathbf{x} cercano a \mathbf{x}_0 . A partir de la ecuación 2.1, para estos puntos \mathbf{x} , $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 0$. Se elige un valor particular $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \nabla f(\mathbf{x}_0)^T$ donde $\lambda > 0$ es lo suficientemente pequeño para que la aproximación 2.1 sea válida. Entonces se tiene que $\lambda \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2 \leq 0$ siendo $\lambda > 0$. Esto puede ocurrir sólo si

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (2.2)$$

El razonamiento es equivalente para un mínimo y conduce a la misma ecuación 2.2. Por lo tanto, el extremo relativo \mathbf{x}_0 tiene que ser un punto crítico (ver definición 24). A continuación se presenta un teorema con una condición necesaria para la existencia de extremos relativos.

Teorema 13 (Extremos relativos). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U , abierto de \mathbb{R}^n . Si $\mathbf{x}_0 \in U$ es un extremo relativo de f , entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$. Es decir, los extremos relativos se producen solamente en puntos críticos.

Esta condición es necesaria pero no es suficiente. Resulta que hay otra clase de puntos \mathbf{x}_0 , llamados **puntos de silla**, en los que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$. Son puntos en los que según una dirección son máximos, pero según otra verifican la condición de ser mínimos. Su nombre viene de que, localmente, la función f tiene forma de silla de montar a caballo, tal y como se muestra en la figura 2.2.

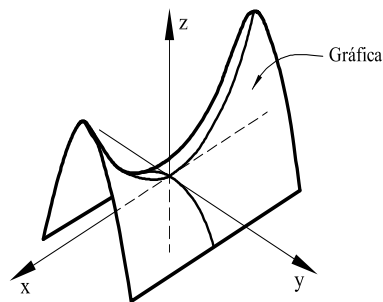


Figura 2.2. El origen es un punto de silla: máximo en dirección y , mínimo en dirección x

Falta encontrar un segundo criterio, en este caso condición suficiente, que permita distinguir de entre los puntos críticos cuáles son máximos, cuáles mínimos, cuáles punto de silla y cuáles no son ni una cosa ni la otra. Por eso se considera un desarrollo de Taylor de orden 2.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . El desarrollo de Taylor de orden 2 de f en el punto \mathbf{x}_0 es:

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.3)$$

donde $H_f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz hessiana de $f(\mathbf{x})$ evaluada en \mathbf{x}_0 . Hay que notar que el símbolo \simeq (aproximación) es necesario, ya que se han desechado los términos de orden superior a 2. Se ha mejorado así la aproximación lineal dada en la ecuación 2.1, obteniendo una aproximación cuadrática.

Como se supone que \mathbf{x}_0 es un extremo, por el teorema 13, se tiene que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ y la ecuación 2.3 es de hecho:

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

es decir,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.4)$$

Se consideran ahora tres posibles casos para el punto crítico \mathbf{x}_0 : máximo, mínimo y punto de silla.

\mathbf{x}_0 máximo

Por definición, si f tiene un máximo en \mathbf{x}_0 , resulta que para todo \mathbf{x} cercano a \mathbf{x}_0 (que es justamente donde 2.4 se cumple), se verifica que

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \leq 0 \quad (2.5)$$

De ahí que usando la ecuación 2.4, para que se verifique la definición 23 de máximo, tiene que cumplirse que

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 0 \quad (2.6)$$

Esto ocurre si la matriz hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$ de f tiene que definida negativa en \mathbf{x}_0 :

$$H_f(\mathbf{x}_0) < 0 \quad (2.7)$$

Por lo tanto, la función f tiene un máximo relativo en el punto crítico \mathbf{x}_0 si la matriz hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa. Notar que la condición 2.7 es suficiente para que se cumpla la desigualdad 2.6, pero no es necesaria.

\mathbf{x}_0 mínimo

De manera análoga, f tiene un mínimo relativo en \mathbf{x}_0 si para todo \mathbf{x} cercano a \mathbf{x}_0 se verifica $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$, o lo que es lo mismo:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0$$

Esto ocurre si la matriz hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$ de f tiene que definida positiva en \mathbf{x}_0 :

$$H_f(\mathbf{x}_0) > 0 \quad (2.8)$$

Por lo tanto, la función f tiene un mínimo relativo en el punto crítico \mathbf{x}_0 si la matriz hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva.

\mathbf{x}_0 punto de silla

Por definición, \mathbf{x}_0 es un punto de silla de f si es un punto crítico que no es un extremo. Se puede demostrar que \mathbf{x}_0 es un punto de silla de f si la matriz hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$ no es ni definida positiva ni definida negativa, y además su determinante es diferente de cero.

$$\begin{cases} H_f(\mathbf{x}_0) \text{ no definida positiva ni negativa} \\ \det(H_f(\mathbf{x}_0)) \neq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

3 Integral múltiple y aplicaciones

En este capítulo se aborda el tema de la integral múltiple y sus aplicaciones. La primera sección consiste en una introducción a las integrales donde se repasan los conceptos básicos de la integral simple. La segunda y tercera sección se centran en la integral doble y triple respectivamente. En la sección cuatro se estudia el cambio de variable y finalmente en la sección cinco se ven algunas aplicaciones de todos los conceptos del capítulo. Como viene siendo usual en el libro, las dos últimas secciones del capítulo corresponden a problemas resueltos y ejercicios propuestos respectivamente.

3.1. Introducción: Integral simple

Antes de introducir la idea de integral para una función de varias variables, se recuerda la definición de integral definida para una función de una sola variable. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y positiva, se quiere

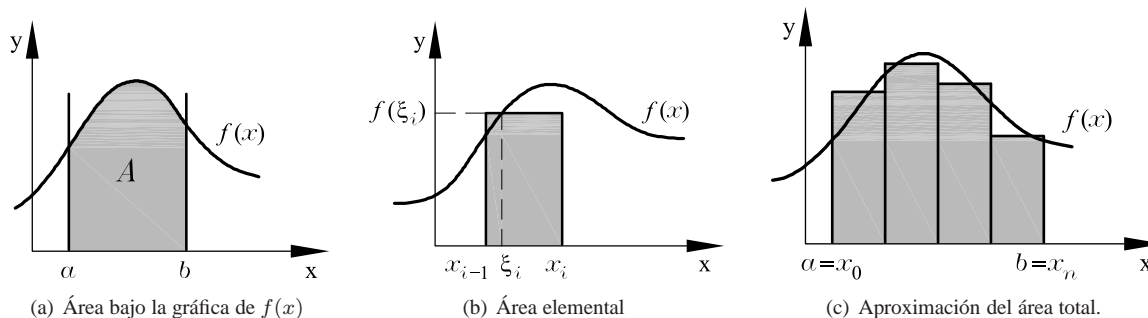


Figura 3.1. Idea de la integral en el sentido de Riemann

determinar el área, A , limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, como se indica en la figura 3.1 (a).

Una primera idea para aproximar el área consiste en efectuar una partición p del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de manera que en cada subintervalo, $[x_{i-1}, x_i]$, se aproxima el área bajo la curva mediante el área del rectángulo de altura $f(\xi_i)$ para algún $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, como se observa en las figuras 3.1 (b) y (c). El conjunto de todas estas particiones se nota $\mathcal{P}([a, b])$.

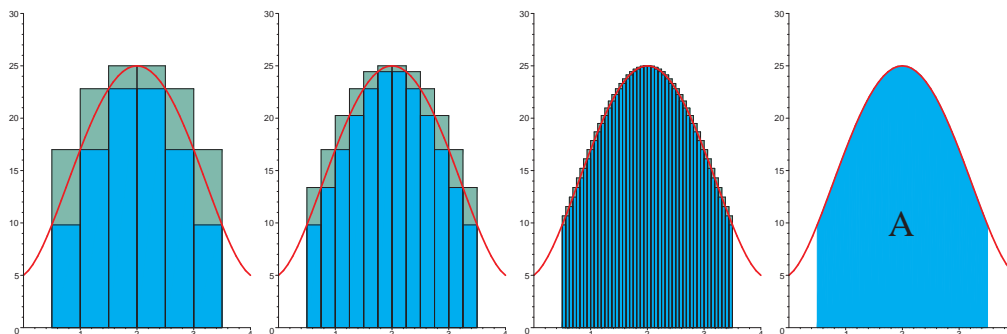


Figura 3.2. Convergencia de las sumas superior e inferior a medida que se toman particiones más finas

3.1.1. Idea para aproximar el área superiormente

Se considera ξ_i tal que $f(\xi_i) = \max\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y se llama M_i a este valor máximo. Sumando el área de los rectángulos que determinan, se obtiene una suma superior del área que se denota \bar{S}_p

$$\bar{S}_p := M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

3.1.2. Idea para aproximar el área inferiormente

Se considera ξ_i tal que $f(\xi_i) = \min\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y se llama m_i a este valor mínimo. Sumando el área de los rectángulos que determinan, se obtiene una suma inferior del área que se denota \underline{S}_p

$$\underline{S}_p := m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

3.1.3. Integrable en el sentido de Riemann

En las secciones anteriores, se ha descrito cómo obtener sumas superiores e inferiores del área. En general, es fácil observar que si se refina una partición dada, la suma inferior (\underline{S}_p) aumenta y la suma superior (\bar{S}_p) disminuye (ver Fig. 3.2).

Definición 28 (Función integrable). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en su dominio, se dice que f es integrable en el sentido de Riemann (o simplemente integrable) si se cumple:

$$\max_{p \in \mathcal{P}([a,b])} \{\underline{S}_p\} = \min_{p \in \mathcal{P}([a,b])} \{\bar{S}_p\}$$

Entonces se llama a dicho valor *integral de f en $[a, b]$* y se denota por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Observación 1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y positiva, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

donde A es el área limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.

Propiedades básicas de la integral de Riemann

Dadas las funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en el sentido de Riemann, entonces:

$$\begin{aligned} \triangleright \int_a^b k f(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \quad \forall k \in \mathbb{R} \\ \triangleright \int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \triangleright \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ \triangleright \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx \quad \forall c \in [a, b] \\ \triangleright \int_a^a f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

3.1.4. Regla de Barrow

Se sabe que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en el sentido de Riemann, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \max_{p \in \mathcal{P}([a, b])} \{S_p\} = \min_{p \in \mathcal{P}([a, b])} \{\bar{S}_p\}$$

Sin embargo, esta definición es difícil de utilizar para el cálculo de integrales de forma práctica.

Teorema 17 (Regla de Barrow). Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a)$$

donde $\phi(x)$ es una primitiva de f , es decir:

$$\phi'(x) = f(x)$$

Se acostumbra a denotar por:

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(x) \Big|_a^b = \phi(b) - \phi(a)$$

La proposición anterior relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de primitivas.

3.2. Integral doble

Dada $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables acotada y positiva, se quiere determinar el volumen limitado por la gráfica de f y los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, como se indica en la figura 3.3 (a).

Una primera idea para aproximar el volumen consiste en efectuar particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en n y m subintervalos respectivamente (ver Fig. 3.3 (b))

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

de manera que en cada rectángulo, $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, se aproxima el volumen bajo la superficie mediante el volumen del paralelepípedo de altura $f(\xi_i, \eta_j)$ para algún $(\xi_i, \eta_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ (ver Fig. 3.3 (c)-(d)).

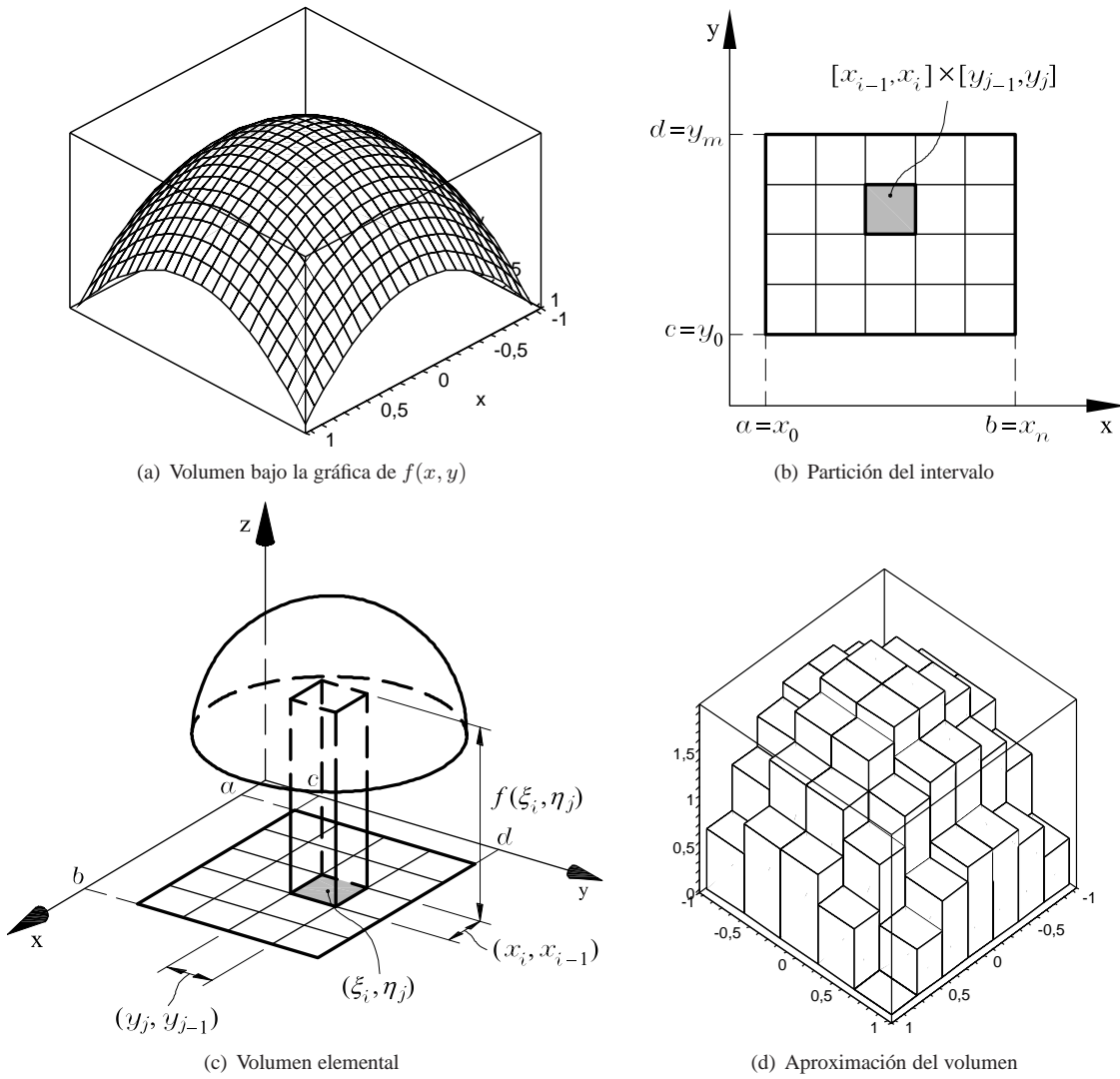


Figura 3.3. Idea de la integral doble

4 Ecuaciones diferenciales ordinarias

En muchas ocasiones, al estudiar un fenómeno físico, no es posible hallar de forma inmediata las leyes físicas que relacionan las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno. Pero en algunos casos sí que es fácil poder establecer la dependencia entre dichas magnitudes y sus derivadas, es decir, modelar el fenómeno mediante una ecuación diferencial. Así pues, el estudio de ecuaciones diferenciales es de suma importancia para la ciencia y la ingeniería.

En el presente capítulo se presentan las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden y se estudia su resolución. También se comenta de forma más breve la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Es importante añadir que, además de los métodos de resolución que se presentan en este capítulo, existen otros métodos, como el de la aplicación de transformadas integrales, que se verá en el capítulo 6, y la aplicación de métodos numéricos aproximados. Este último método es propio de asignaturas de cálculo numérico, por lo que no es considerado en este texto.

4.1. Ejemplo introductorio

Se considera un cuerpo de masa m sujeto al extremo de un resorte flexible (muelle) suspendido a un soporte rígido, tal y como se muestra en la figura 4.1.

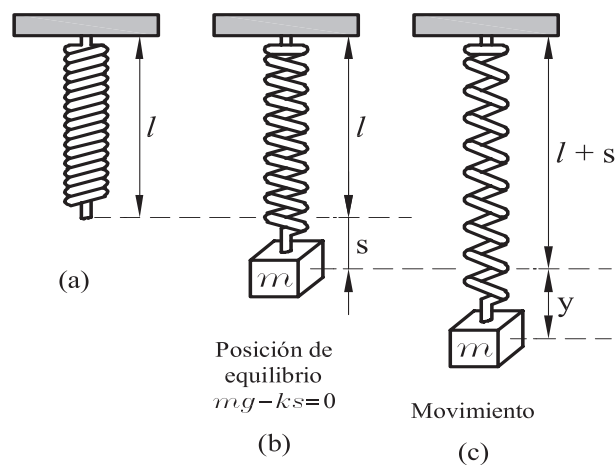


Figura 4.1. Masa suspendida de un muelle

El muelle no ejerce fuerza cuando el cuerpo se halla en la posición de equilibrio, en la que $y = 0$ y, entonces, $mg - ks = 0$. Si se desplaza una distancia y , el muelle ejerce una fuerza restauradora dada por la ley de Hooke, $F_r = -ky$, donde k es una constante de proporcionalidad de valor positivo y cuya magnitud depende de la rigidez del muelle.

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene que

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0$$

Llamando $\lambda = \sqrt{k/m}$, se tiene la relación

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda^2 y = 0 \quad (4.1)$$

Esta relación se llama *ecuación diferencial* y relaciona $y(t)$ con sus derivadas (en este caso con su derivada segunda). El objetivo de este capítulo es proponer herramientas para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales, es decir, determinar la función incógnita $y(t)$.

En este ejemplo, se puede comprobar que

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\lambda t) + C_2 \operatorname{cos}(\lambda t) \quad (4.2)$$

donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera, verifica dicha ecuación diferencial. En efecto,

$$y'(t) = C_1 \lambda \operatorname{cos}(\lambda t) - C_2 \lambda \operatorname{sen}(\lambda t)$$

con lo cual

$$y''(t) = -C_1 \lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda t) - C_2 \lambda^2 \operatorname{cos}(\lambda t) = -\lambda^2 y(t)$$

Se puede demostrar que la función 4.2 es la única solución de la ecuación diferencial 4.1.

4.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

4.2.1. Primeras definiciones

Esta sección se inicia con unas primeras definiciones de los conceptos básicos y con el estudio de las ecuaciones diferenciales más sencillas, las de primer orden.

Definición 31 (Ecuación diferencial ordinaria). Es una ecuación que debe cumplir una función desconocida $y(x)$ con su variable independiente x y las derivadas de $y(x)$ hasta un orden determinado:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4.3)$$

Se denominan **ordinarias** para distinguirlas de las ecuaciones diferenciales en **derivadas parciales**. Un ejemplo de ecuación diferencial está dado en la relación 4.1, donde la variable independiente es el tiempo t y la dependiente es y .

Definición 32 (Orden de una ecuación diferencial). Es el mayor de los órdenes de las derivadas que contiene la ecuación diferencial. En la ecuación diferencial 4.1 el orden es 2, ya que interviene la derivada segunda.

Definición 33 (Solución general). Es una expresión que contiene todas las funciones $y(x)$ que, sustituidas en la ecuación diferencial, la satisfacen para cualquier valor de x . Dicha expresión contiene siempre n constantes arbitrarias (constantes de integración). En el ejemplo anterior, la solución dada en la ecuación 4.2 es una solución general porque no se ha asignado un valor específico a las constantes de integración C_1 y C_2 . Notar también que hay DOS constantes de integración para la ecuación diferencial de orden DOS.

Definición 34 (Solución particular). Es cada una de las funciones de la familia que forman la solución general. Cada una de ellas corresponde a unos valores determinados de las n constantes de integración. En el ejemplo anterior, si se toma $C_1 = \sqrt{2}$ y $C_2 = -50$, entonces la solución $y(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\lambda t) - 50 \operatorname{cos}(\lambda t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

Ejemplo 35. La ecuación diferencial

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \quad y(1) = 2$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Su particularidad con respecto al ejemplo anterior es que se impone una condición inicial $y(1) = 2$. La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

se pueden separar a cada lado de la igualdad las variables x e y

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

e integrando ambos lados

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + K$$

y despejando y , se obtiene la solución general de la ecuación diferencial

$$y = Cx$$

Tal y como se muestra en la figura 4.2, la solución hallada corresponde a una familia de rectas. Cada una de ellas es una solución particular de la ecuación diferencial. Para obtener la solución particular correspondiente a la condición inicial $y(1) = 2$, que proporciona el enunciado del problema, hay que imponer que se cumpla dicha condición y hallar el valor de la constante. Así pues, dado que $y(1) = 2$, se tiene que

$$2 = C \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Y la solución particular es

$$y = 2x$$

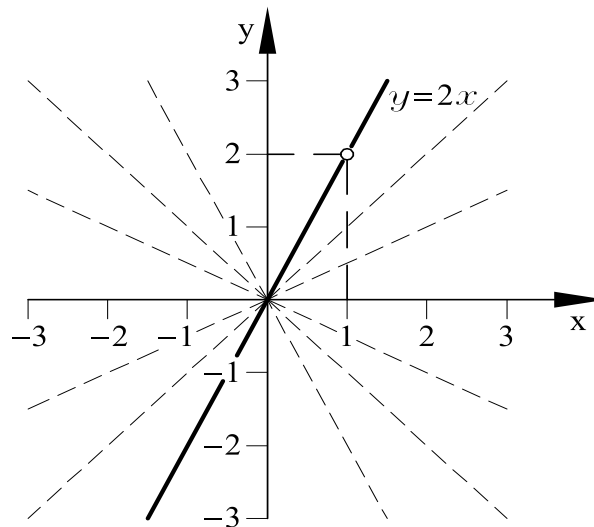


Figura 4.2. Representación de la solución general y particular de la ecuación diferencial del ejemplo 35

5 Análisis vectorial

Se presentan en este capítulo, a nivel introductorio, los rudimentos del análisis vectorial. Se introduce primeramente la descripción paramétrica de las curvas en el plano y el espacio a través de trayectorias. Se definen algunos conceptos relacionados con las curvas y las trayectorias como el vector velocidad y la celeridad de una trayectoria, la recta tangente a una curva, o la longitud de arco de una trayectoria. A continuación se presenta el concepto de campo vectorial, esto es, una aplicación que asigna a cada punto del plano o del espacio un vector. Se insiste en su motivación física, y se relaciona con el concepto de trayectoria a través de las líneas de flujo. Se introduce un tipo especial de campo vectorial: los campos conservativos. Se proporcionan seguidamente los operadores diferenciales que actúan sobre los campos vectoriales, esto es, la divergencia y el rotacional. Se dan las definiciones formales, así como ejemplos e intuición física sobre su significado. Se presentan varias identidades que involucran estos operadores. Como paso previo al teorema de Green, se introduce la noción de integración sobre trayectorias, tanto de campos escalares como de campos vectoriales. Se discute el efecto de la orientación de la parametrización de una curva en las integrales sobre trayectorias. Finalmente, como colofón del capítulo y combinando todos los conceptos introducidos en el mismo y algunos del capítulo 3, se enuncia y demuestra el teorema de Green en el plano. Se muestran aplicaciones, y se demuestra el teorema de la divergencia en el plano a partir del teorema de Green.

5.1. Curvas y trayectorias

Informalmente, se puede entender una curva plana C como la línea trazada por un lápiz en una hoja de papel. Del mismo modo, una curva en el espacio puede visualizarse a través de un alambre alabeado. La estela de humo dejada por un avión acrobático describe también una curva en el espacio. Desde un punto de vista matemático, resulta útil concebir las curvas como funciones que toman valores en un intervalo $[a, b]$ y devuelven puntos del plano o del espacio. Dicha función de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 se denomina *trayectoria*, y se denota aquí mediante \mathbf{c} . Es habitual utilizar t para la variable independiente, ya que a menudo representa el *tiempo*, aunque no siempre es así. Resulta útil imaginar que $\mathbf{c}(t)$ representa la posición en el plano o el espacio de una partícula en movimiento en el instante $t \in [a, b]$. La imagen del intervalo $[a, b]$ por la trayectoria, o dicho de otro modo, el conjunto de posiciones de la partícula en movimiento, es precisamente la curva C (ver Fig. 5.1). Se dice que la trayectoria \mathbf{c} *parametriza* la curva C , o bien, que la trayectoria *describe* la curva cuando t varía. Dada una curva C , existen múltiples trayectorias que la parametrizan, del mismo modo que aviones acrobáticos viajando a diferente velocidad pueden dejar la misma estela detrás de sí.

Definición 38 (Trayectoria y curva). Se denomina **trayectoria** en el plano (o en el espacio) a la aplicación \mathbf{c} de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^3). Para curvas en el espacio (y análogamente para curvas planas), se escribe:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} : [a, b] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ se denominan componentes de \mathbf{c} . El conjunto C de puntos $\mathbf{c}(t)$ conforme t varía entre a y b se denomina **curva**.

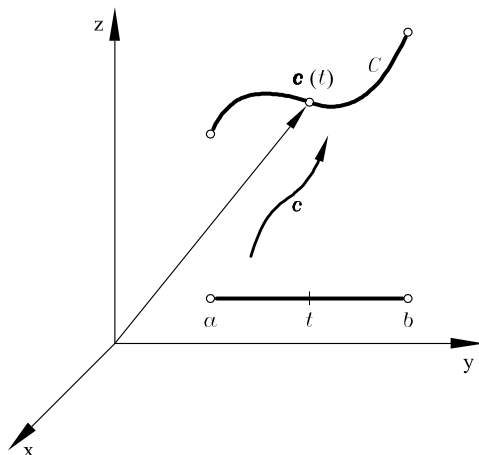


Figura 5.1. La trayectoria \mathbf{c} es una aplicación del intervalo $[a, b]$ en el espacio, cuya imagen es la curva C

Ejemplo 49. Según la definición 38, las rectas son casos particulares de curvas. Así, la recta en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección del vector \mathbf{v} puede describirse mediante la trayectoria

$$\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t \mathbf{v}$$

Nótese que la trayectoria

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (t - t_0) \mathbf{v}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, describe la misma recta.

Ejemplo 50. La circunferencia de radio R en el plano es la imagen de la trayectoria

$$\mathbf{c}(t) = R (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Es sencillo comprobar que los puntos $\mathbf{c}(t)$ verifican la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ que describe la circunferencia (ver Fig. 5.2). Además, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(2\pi)$, por tanto la trayectoria describe la totalidad de la circunferencia. Nótese que si se considerase el intervalo $[0, 4\pi]$, la trayectoria estaría dando dos vueltas a la circunferencia. Al igual que antes, dicha circunferencia puede describirse mediante otra *parametrización* de la trayectoria, por ejemplo:

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = R(\cos 2t, \sin 2t), \quad t \in [0, \pi]$$

Ejemplo 51. Las gráficas de funciones $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son curvas de \mathbb{R}^2 que pueden describirse mediante la trayectoria

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b].$$

Nótese que en general no todas las curvas son gráficas de funciones (ver Fig. 5.3).

Siguiendo con la analogía de la partícula en movimiento, o la del avión acrobático dejando una estela de humo detrás de sí, resulta muy natural, dada una trayectoria, asociar a cada instante de tiempo t un *vector velocidad*. La celeridad es la magnitud del vector velocidad, y es el escalarse que puede medirse en un velocímetro. Si la trayectoria presenta ángulos, por ejemplo, porque la partícula choca con una pared en un instante t_0 , no se puede definir el

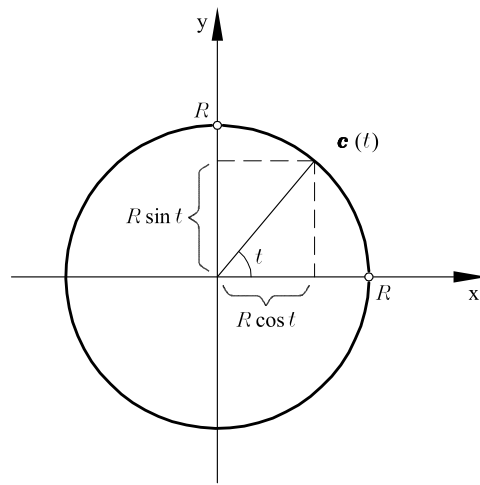


Figura 5.2. La trayectoria plana $\mathbf{c} = R(\cos t, \sin t)$ describe una circunferencia de radio R

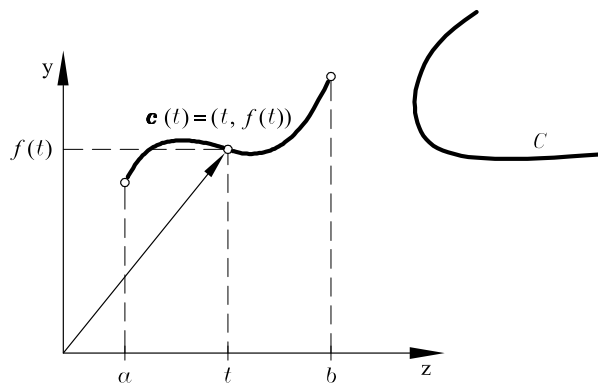


Figura 5.3. Las gráficas de funciones pueden describirse mediante trayectorias planas. No todas las curvas, por ejemplo la curva C , son gráficas de funciones

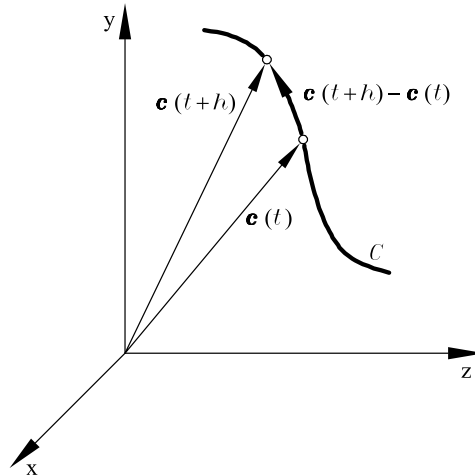


Figura 5.4. Al tender h a cero, el vector $(\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t))/h$ tiende a un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$

vector velocidad en el instante del choque al no poder decidir si la velocidad de la partícula en t_0 es aquella que precede inmediatamente al choque (acercándose a la pared) o aquella en el instante de tiempo inmediatamente posterior (alejándose de la pared). Por ello, en la definición del vector velocidad se exige que la trayectoria sea diferenciable, esto es, que no presente ángulos ni discontinuidades.

Definición 39 (Velocidad). Sea \mathbf{c} una trayectoria diferenciable. El vector velocidad de \mathbf{c} en t se define como

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}$$

La celeridad de la trayectoria en el instante t es la longitud del vector velocidad, $v(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$. Para trayectorias descritas por las funciones componente en el espacio (y análogamente en el plano), se tiene

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

y por tanto

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

Interpretando el vector velocidad como un vector columna o una matriz 3×1 , la definición de $\mathbf{c}'(t)$ es consistente con la de matriz jacobiana vista en el capítulo 1. Habitualmente, el vector velocidad $\mathbf{c}'(t)$ se traza con origen en $\mathbf{c}(t)$, ya que a menos que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{0}$, se trata de un vector tangente a la curva descrita por la trayectoria \mathbf{c} en el punto $\mathbf{c}(t)$ (ver Fig. 5.4).

Ejemplo 52. Recuérdese la trayectoria \mathbf{c} del ejemplo 50 que describía un círculo de radio R . El vector velocidad correspondiente en el instante t es $\mathbf{c}'(t) = R(-\sin t, \cos t)$, y por tanto su celeridad es $v(t) = R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = R$. Se ve que para esta trayectoria, si bien el vector velocidad depende del tiempo al girar la partícula en la circunferencia, la celeridad escalar es constante en el tiempo. Considérese ahora la trayectoria $\tilde{\mathbf{c}}$ que describe la misma curva. Ahora $\tilde{\mathbf{c}}'(t) = 2R(-\sin 2t, \cos 2t)$ y por tanto $\tilde{v}(t) = 2R$. Si bien la curva no se altera al cambiar la parametrización, la velocidad y celeridad sí se ven alteradas.

Es incluso posible definir parametrizaciones de la misma curva que presenten celeridades no constantes. Por ejemplo, considérese la trayectoria

$$\hat{\mathbf{c}}(t) = R(\cos t^2, \sin t^2)$$

6 Cálculo operacional

Se presentan en este capítulo, a nivel introductorio, los rudimentos del cálculo operacional. Se introduce el marco general en que se desarrolla la transformada de Laplace: funciones suficientemente suaves y variable de Laplace real. Se explica en qué sentido se define la inversa de esta transformada y se presentan ejemplos de cálculo tanto de la transformada directa como de la inversa. Se demuestra la fórmula de la transformada de la derivada y se presenta la aplicación de este resultado a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. Se introduce la transformada de Fourier y se presenta un ejemplo de cálculo de esta transformada.

6.1. Transformada de Laplace. Transformada inversa. Linealidad

Definición 53. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de la variable real t . Se dice que f es continua por secciones si en cada intervalo finito donde f está definida, f es continua excepto posiblemente en un número finito de puntos. Además, en los puntos de discontinuidad, los límites laterales de la función f existen.

En la figura 6.1 se presenta un ejemplo de una función continua por secciones. En particular, toda función continua es continua por secciones.

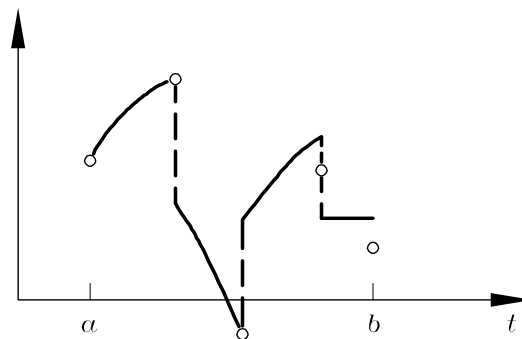


Figura 6.1. Ejemplo de una función $f(t)$ continua por secciones. Los puntos marcan los valores de la función en los saltos

Teorema 27. Sea $f(t)$ una función continua por secciones en \mathbb{R}^+ . Se supone que existen constantes $M \geq 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad (6.1)$$

para todo $t \geq 0$.¹ Entonces, la integral impropia

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (6.2)$$

¹Se dice que la función f es de orden exponencial.

existe para todo $s > \bar{\gamma}$ donde

$$\bar{\gamma} = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} \text{ tal que se cumple la desigualdad 6.1} \} \quad (6.3)$$

De esta manera, se ha definido una nueva función $F : (\bar{\gamma}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia al elemento $s \in (\bar{\gamma}, +\infty)$ la integral impropia de la ecuación 6.2.

Definición 54. La aplicación que a la función f asocia la función F se llama **transformada de Laplace**² y se nota \mathcal{L} . Es decir, $F = \mathcal{L}(f)$.

Con esta notación, la ecuación 6.2 puede escribirse como

$$\mathcal{L}(f)(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (6.4)$$

Para simplificar las notaciones, se usa a menudo $\mathcal{L}(f)$ en lugar de $\mathcal{L}(f)(s)$ en la ecuación 6.4.

Ejemplo 70. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(t) = 1$ para $t \geq 0$. Encontrar la transformada de Laplace de f .

Solución. Para poder calcular la transformada de Laplace 6.4, primero hay que verificar que existe. Para ello, se aplica la proposición 27, teniéndose que se verifican dos condiciones:

1. f continua por secciones: al ser $f(t) = 1$ constante, f es continua en \mathbb{R}^+ y en particular es continua por secciones.
2. f de orden exponencial: escogiendo $M = 1$ y $\gamma = 0$, está claro que f verifica $|f(t)| \leq M e^{\gamma t} = 1$ para todo $t \geq 0$.

Con eso se deduce de la proposición 27 que la transformada de Laplace existe para todo $s > \bar{\gamma}$ donde $\bar{\gamma}$ está definida por la ecuación 6.3. Para determinar el valor de $\bar{\gamma}$, se nota que la desigualdad $1 = |f(t)| \leq M e^{\gamma t}$ no se cumple para $\gamma < 0$ porque en este caso $\lim_{t \rightarrow \infty} M e^{\gamma t} = 0 < 1$. Es decir, $\bar{\gamma} = 0$. La proposición 27 asegura la existencia de la transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$ para todo $s > \bar{\gamma} = 0$.

Para todo $T \geq 0$ tenemos

$$\int_0^T e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = -\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s}$$

En consecuencia, de la ecuación 6.4 se obtiene

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sT} \right) + \frac{1}{s} \quad (6.5)$$

Como $s > 0$, $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = 0$ y por tanto,

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{para todo } s > 0 \quad (6.6)$$

El cuadro 6.1 recoge las transformadas de Laplace de algunas funciones usuales. En este cuadro, las funciones $f(t)$ están definidas en \mathbb{R}^+ . En \mathbb{R}^- , el valor que toma $f(t)$ no es importante, ya que la transformada de Laplace es una integral de cero al infinito. En la figura 6.2 se presentan varias funciones que tienen la misma transformada de Laplace $F(s) = 1/s$. Para determinar transformadas de Laplace de funciones que no están en dicho cuadro, se usan algunas propiedades de la transformada como la linealidad.

²En la ecuación 6.2, se considera habitualmente que s es un número complejo. En este curso, el estudio de la transformada de Laplace se limitará a s real.

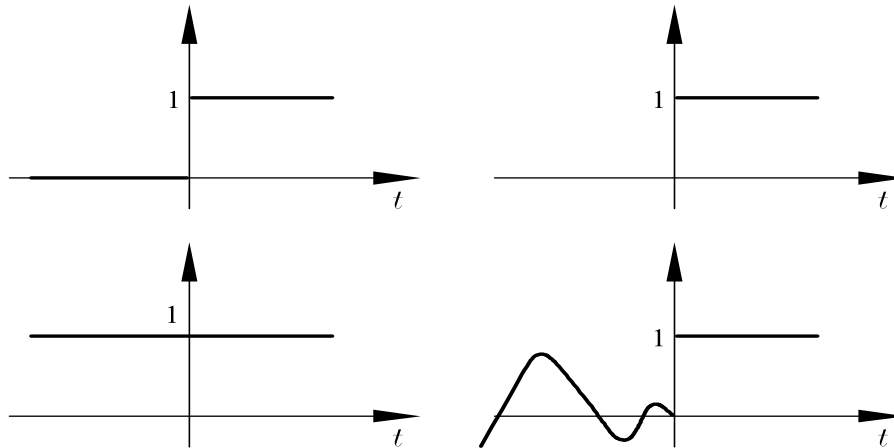


Figura 6.2. Ejemplo de funciones que tienen la misma transformada de Laplace. En el cuadro superior derecho, la función no está definida en \mathbb{R}^-

Teorema 28. La transformada de Laplace es una operación lineal; es decir, para cualesquiera funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existan y para cualesquiera constantes a y b ,

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \quad (6.7)$$

Ejemplo 71. Sea la función $f(t) = 2e^{5t} - \text{sen}(t)$. Encontrar $\mathcal{L}(f)$.

Solución. Usando la linealidad de la transformada de Laplace se obtiene

$$\mathcal{L}(f(t)) = 2\mathcal{L}(e^{5t}) - \mathcal{L}(\text{sen}(t)) \quad (6.8)$$

De la fila 4 del cuadro 6.1 se obtiene

$$\mathcal{L}(e^{5t}) = \frac{1}{s-5} \quad (6.9)$$

De la fila 6 del cuadro 6.1 se obtiene

$$\mathcal{L}(\text{sen}(t)) = \frac{1}{s^2+1} \quad (6.10)$$

Con lo cual

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s-5} - \frac{1}{s^2+1} \quad (6.11)$$

para $s > 5$.

Ahora, sea F la transformada de Laplace de la función f que está definida en \mathbb{R}^+ . ¿Puede existir otra función g definida en \mathbb{R}^+ , diferente de f , tal que $\mathcal{L}(g) = F$? La respuesta es sí. Por ejemplo, si f y g difieren en un sólo punto, se tiene $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$. Más generalmente, si f y g difieren en un conjunto que no afecta a la integral, entonces tienen la misma transformada de Laplace.³ De esta manera se puede definir una relación de equivalencia donde dos funciones son equivalentes si tienen la misma transformada de Laplace. Dada una función f , la clase de equivalencia que contiene f es única y se nota \bar{f} .

Definición 55. La aplicación que a la función F asocia la clase de equivalencia \bar{f} es la transformada inversa de Laplace y se nota \mathcal{L}^{-1} . Es decir, $\bar{f} = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

³La caracterización de este conjunto hace intervenir la teoría de la medida, saliendo del marco de este curso.

Cuadro 6.1. Algunas funciones $f(t)$ y sus transformadas de Laplace $F(s)$

	$f(t)$	$F(s)$	Nota
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n > 0$ entero, $s > 0$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
5	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
6	$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
7	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a $
8	$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $
9	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$n > 1$ entero, $s > -a$
10	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$ \zeta < 1, \omega_n > 0, s > -\zeta\omega_n$

En general, dada una función $F(s)$, es suficiente hallar una función $f(t)$ tal que $\mathcal{L}(f) = F$ (con la ayuda del cuadro 6.1, por ejemplo). Una vez se tiene f , se sobreentiende que la transformada inversa de Laplace de F es \bar{f} .

Teorema 29. La transformada inversa de Laplace es una operación lineal; es decir, para cualesquiera funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ existan y para cualesquiera constantes a y b ,

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (6.12)$$

Ejemplo 72. Sea $F(s) = \frac{s}{(s-1)(s+3)}$. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Solución. Primero se busca $F(s)$ en la segunda columna del cuadro 6.1. Al no encontrarla, hay que expresar $F(s)$ como suma de funciones que sí salgan en el cuadro y aplicar entonces la linealidad de \mathcal{L}^{-1} . Cuando $F(s)$ es una fracción racional, se tiene que descomponer en elementos simples para encontrar la transformada inversa de Laplace. En este caso se obtiene

$$\frac{s}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} = \frac{(A+B)s + 3A - B}{(s-1)(s+3)} \quad (6.13)$$

Las constantes A y B tienen que verificar

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 3A - B &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se obtiene $A = 1/4$ y $B = 3/4$. Así, de la ecuación 6.13 se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-3t} \quad (6.15)$$

En la ecuación 6.15 se han usado la linealidad de la transformada inversa de Laplace y la fila 4 del cuadro 6.1.