

POLITEXT

Eduard Bertran Albertí

Procesado digital de señales

Fundamentos para
comunicaciones y control - I

EDICIONS UPC

Procesado digital de señales

Fundamentos para
comunicaciones y control - I

POLITEXT

Eduard Bertran Albertí

Procesado digital de señales

Fundamentos para
comunicaciones y control - I

EDICIONS UPC

Primera edición: febrero de 2006

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

© Eduard Bertran Albertí, 2006

© Edicions UPC, 2006
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.edu

ISBN: 978-84-9880-259-7

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Procesado digital de señales Fundamentos para Comunicaciones y Control

(Volumen I)

Prefacio

Para abarcar todos los ámbitos del Procesado Digital serían necesarios varios textos capaces de cubrir distintos cursos, unos específicos sobre las bases del propio procesado y otros orientados a aplicaciones, como por ejemplo, cursos de imagen y sonido, de control, de instrumentación digital, de bioingeniería o de comunicaciones, si nos referimos al caso de la ingeniería eléctrica. El primer paso para enfrentarse a ellas es el conocimiento de los fundamentos del procesado digital de señales y sistemas, objetivo de la presente obra.

Estos fundamentos son válidos tanto para aplicaciones en Comunicaciones como en Control, con ligeras variaciones. A pesar de esta similitud, la bibliografía de ambas disciplinas no está unificada. Históricamente ello ha tenido un motivo: la diferencia de complejidad entre Comunicaciones y Control, con diferentes requisitos de ancho de banda y diferentes escenarios principales de estudio: el dominio temporal para Control y el frecuencial para Comunicaciones. Incluso aspectos teóricos básicos, como puede ser la transformada Z, se han enfocado de formas diferentes ya que algunas hipótesis de causalidad han sido usualmente un prerrequisito en Control, mientras que son menos importantes en aplicaciones de Comunicaciones. Por el contrario, el análisis de estabilidad y de las formas de la respuesta transitoria ha sido habitualmente más importante en las aplicaciones de Control. Así como el Control se ha orientado más hacia los sistemas, las Comunicaciones lo han hecho más hacia las señales.

Los avances teóricos y tecnológicos han incrementado el solapamiento entre ambas disciplinas. Por un lado, estructuras avanzadas de Control requieren más herramientas de análisis estocástico y una mayor profundización en el dominio frecuencial, mientras que la tecnología permite velocidades de procesado que facilitan la implementación de reguladores anticausales. Por otro lado, las comunicaciones digitales o el control de tráfico en redes de datos han evidenciado un mayor interés en las formas temporales de la respuesta, tradicionalmente restringida a algunos dispositivos o a transitorios en líneas de transmisión.

Esta obra pretende ofrecer un enfoque unificado de las herramientas básicas del Procesado Digital, considerando su uso en aplicaciones tanto de Comunicaciones como de Control. Si bien su primer diseño partió de un curso básico con una duración aproximada de 60 horas, posteriores ampliaciones han proporcionado un material de estudio que puede cubrir sobradamente uno de 120 horas. La duración del curso

determina el énfasis de los últimos capítulos y el carácter de los temas complementarios repartidos a lo largo de los diferentes capítulos, como es la ilustración por medio de ejemplos de aplicaciones específicas, o la presentación de algunos métodos numéricos, como es el caso de los algoritmos de cálculo rápido de la transformada de Fourier.

La importancia del Procesado Digital, continuamente catalizada tanto por el interés comercial de las aplicaciones como por las innovaciones tecnológicas en dispositivos que lo soportan (DSPs, FPGAs,...), se une a la juventud de esta disciplina. Esta combinación de juventud e interés hace que los nuevos avances no suelen dejar obsoletos los anteriores, y frecuentemente nos encontramos con que conocimientos que en un determinado momento parecen sólo relevantes para aplicaciones avanzadas, en poco tiempo pasan a convertirse en herramientas de análisis y diseño habituales. Por todo ello, una obra centrada en los fundamentos del Procesado Digital sólo puede hacerse de tamaño reducido si se centra o bien en las teorías o en las aplicaciones. Si se desean presentar conexiones entre las teorías, las tecnologías y las aplicaciones, atendiendo a los fundamentos para las nuevas aplicaciones, no puede hacerse en un texto de tamaño reducido. Salvo a riesgo de hacer una obra comprensible sólo para quien ya esté familiarizado con la disciplina o esconder algunos fundamentos que, hasta hace pocos años, podían ser perfectamente evitables en un libro de fundamentos.

Dada la extensión de esta obra, su contenido se descompone en dos volúmenes. Con ello se pretende mejorar su manejabilidad, ya que no se busca un texto de consulta puntual sino un material para el estudio. Como ambos volúmenes no son textos independientes, sino que el segundo es continuación natural del primero, no se ha reiniciado en éste la enumeración de las páginas ni de los capítulos a fin de evidenciarlo.

La experiencia nos dice que, al empezar a ejercer la actividad profesional, el primer material de consulta del un nuevo ingeniero suele ser aquel texto que había estudiado en su etapa escolar. Un texto trabajado y familiar en contenidos y terminología, quizás con anotaciones personales, es la primera referencia para recordar y revisar conceptos. Por este motivo, el lector encontrará algunos apartados que van más allá del alcance de un curso introductorio, pues en ellos se apuntan aspectos más avanzados del Procesado Digital, aunque sin el nivel de detalle ofrecido en los apartados que se consideran básicos. Para el seguimiento del curso se suponen conocimientos de la transformada de Fourier para señales de tiempo continuo (tema que se recuerda en el apéndice B) y, en algunos apartados, de la transformada de Laplace (en el apéndice A). Hay que resaltar que la transformada de Laplace no es imprescindible para el seguimiento del curso (excepto para el capítulo 6) ya que, o bien aparece en temas suplementarios, o bien se utiliza para dar una visión alternativa a otros enfoques. Sin embargo, los alumnos que en cursos anteriores de Teoría de Circuitos, de Sistemas Lineales, de Control o de Matemáticas hayan adquirido nociones de esta transformada pueden aprovechar sus conocimientos previos para extrapolar conceptos de sistemas continuos a los discretos, con un menor esfuerzo de aprendizaje.

Como se ha dicho, la obra se centra en el estudio de las herramientas básicas del procesado digital de señales para aplicaciones de comunicaciones y para aplicaciones de control. Esta orientación se efectúa también a través de los ejemplos que se van resolviendo. En el caso particular del control digital, un estudiante que haya seguido esta obra no debe tener problemas en comprender la discretización de reguladores (métodos indirectos de diseño de sistemas de control), ni en aplicar técnicas simples de diseño digital directo, evaluar la estabilidad, el ancho de banda o la precisión de un sistema discreto. Y para futuras asignaturas de comunicaciones, la obra establece las

bases de algunas modulaciones, de codificaciones de fuentes, de la estimación espectral y de la síntesis de filtros digitales. En los actuales equipos de comunicaciones, cada vez se van reemplazando más las clásicas estructuras circuitales de filtros analógicos por procesadores digitales de señales (DSP), lo que confiere al estudio de las herramientas básicas de Procesado Digital la misma relevancia que tradicionalmente han tenido otras, como la Teoría de Circuitos o la síntesis de redes eléctricas, para el desarrollo de aplicaciones.

Un riesgo en un primer curso de procesado digital de señales es que tome un enfoque meramente formal y se limite a la presentación de teoremas y propiedades, y a sus demostraciones. Este enfoque proporcionaría al estudiante una visión desligada de las aplicaciones. Por otro lado, no es deseable evitar estos aspectos, ya que ello implicaría una formación inestable al no adquirirse unas bases mínimas para la comprensión de la disciplina. Y esta comprensión básica es imprescindible para que los futuros ingenieros puedan seguir abordando, durante su carrera profesional, los continuos avances tecnológicos con que deberán ejercer su actividad cotidiana. En esta obra se ha intentado que los aspectos matemáticos básicos para el procesado digital no quedaran desligados de los subsistemas electrónicos que los soportan ni de sus aplicaciones. Tal enfoque podría conllevar el peligro de diseñar un curso excesivamente disperso si se intentaran abordar todos los temas circuitales para la adquisición de señales analógicas o de arquitecturas de diferentes tipos de procesadores digitales. La solución que se ha adoptado ha sido presentar, en los primeros capítulos, la infraestructura electrónica que soporta los sistemas de Procesado Digital, de modo que el lector establezca pronto la conexión entre teorías y tecnologías. Si esto se logra al principio, a medida que se va avanzando en el curso cada vez es menos necesario seguir insistiendo en los aspectos tecnológicos.

El nivel de partida es el que hayan podido proporcionar previamente disciplinas orientadas al análisis básico de sistemas continuos, especialmente en lo referente a la transformada de Fourier y, ocasionalmente, a la de Laplace. También es conveniente que se conozcan aspectos elementales de filtrado analógico.

En este primer volumen de la obra, después de revisarse algunos aspectos básicos de señales y sistemas discretos, y de introducir modelos de ellos, el temario se centra en el muestreo y la cuantificación de señales analógicas, operación fundamental para el procesado digital y cuya implementación correcta será capital para el buen funcionamiento de un sistema. Esta operación es la que relaciona las señales continuas con las discretas, y es el punto de partida en la mayoría de sistemas digitales al ser el primer paso para que un procesador digital pueda operar con señales procedentes del mundo analógico. Su relevancia se desprende de la propia bibliografía: en textos de nivel más avanzado ya se parte del procesado de unas muestras, dándose por supuesto que el lector conoce de cursos previos la forma correcta de adquirirlas, así como los subsistemas necesarios para ello.

Una vez tratada la adquisición de señales analógicas, en los siguientes capítulos se caracterizan las señales y los sistemas discretos, y se determinan las componentes y las formas de su respuesta temporal, para pasar a caracterizarlas en el dominio frecuencial con ayuda de la transformada Z, como paso previo al análisis y diseño de filtros digitales. Si bien se ha procurado que el texto sea, hasta cierto punto, autocontenido, introduciendo la mayoría de propiedades y formas de operación con esta transformada, sólo se insiste en las de uso más habitual. A través de ejemplos se introduce la utilización de la transformada Z para el análisis (precisión y estabilidad) y diseño de sistemas digitales de control, sobre los que se profundiza en el capítulo 6.

Con el capítulo 6 (Sistemas de Control Digital) concluye este primer tomo de la obra. Un estudiante que lo haya seguido habrá adquirido las bases para la adquisición de señales evaluando la calidad de ésta, la descripción de señales y sistemas, el análisis de los aspectos básicos a partir de respuestas temporales, de diagramas de programación y del dominio transformado Z. Y habrá adquirido las bases para el análisis y diseño, con conocimiento de las principales alternativas, de sistemas realimentados de control. En algunos planes de estudios este primer tomo puede ser perfectamente autocontenido si los objetivos de aprendizaje se centran en la dinámica temporal de sistemas.

En el segundo volumen se tratarán aspectos de la respuesta frecuencial de señales y sistemas discretos. En primer lugar, la propia transformada de Fourier de secuencias discretas, base para los siguientes capítulos y sobre la que se presentarán aspectos de filtrado de señales. Después se introducirá la transformada discreta de Fourier (DFT) entendida como la herramienta práctica de evaluación de respuestas frecuenciales con elementos de cálculo digital. El volumen continúa con un capítulo dedicado a la correlación de señales, considerándolas tanto deterministas como aleatorias. Este tema es capital para los nuevos sistemas de comunicaciones en canales adversos o multiusuario, así como para la identificación de sistemas, punto de partida en el diseño de muchas estrategias de control. Conocido el análisis espectral, se presentará el diseño de filtros digitales, que para los lectores interesados en el control de sistemas pueden ser entendidos como controladores o reguladores digitales. Y se concluye con una introducción al procesamiento de señales a diferentes velocidades dentro de una misma aplicación, tema de gran relevancia en modernos sistemas de audio y de vídeo digital.

A lo largo de la obra se va proponiendo gradualmente el uso del programa Matlab, partiendo de aplicaciones sencillas para comprobar el resultado de los ejercicios, hasta llegar a usarlo como herramienta de diseño. Sin embargo, no se pretende sustituir los "manuales de usuario" de este programa de simulación.

El objetivo global es que el lector adquiera unas habilidades en los métodos y técnicas básicos de procesamiento digital que le capaciten para evaluar respuestas temporales y estabildades, calcular e interpretar la DFT, operar en el dominio frecuencial con potencias y energías, diseñar filtros y controladores digitales, y que conozca las principales aplicaciones del Procesado Digital en Comunicaciones y en Control.

La elaboración de este texto no es posible sin la ayuda de amigos, a los que quiero considerar así antes que profesionales y colegas de la educación y de la ingeniería. Por orden de aparición, debo mencionar en primer lugar a J. R. Cerquides, actualmente profesor de la Universidad de Sevilla y con quien compartí docencia de Procesado de la Señal en la época en que se inició la elaboración de este texto. En segundo lugar, a otros compañeros docentes con quien he discutido sobre el material de estudio, su enfoque y las aplicaciones: Gabriel Montoro, Meritxell Lamarca, Jaume Piera y Francesc Tarrés. Y, en tercer lugar, a los muchos profesores, especialmente de departamentos de Teoría de la Señal y Comunicaciones y de Ingeniería de Sistemas y Automática, con quienes he tenido, desde hace años, instructivas conversaciones sobre aspectos teóricos y aplicados del Procesado Digital y del Control Digital. Finalmente, y con un agradecimiento muy especial, debo recordar a los alumnos de los diferentes centros donde he sido profesor, por dos motivos: el primero, por su papel incentivador en la elaboración de este material y, el segundo, porque durante quince años (tiempo transcurrido desde que se inició la elaboración de un material de estudio cuya depuración y ampliación año tras año ha derivado en el presente texto) han facilitado, con sus comentarios, preguntas y consultas, esta versión final del libro. Y, de entre ellos, a Patricia Lloret, quien, una vez ya cursada la disciplina, trabajó la edición final del libro.

ÍNDICE

VOLUMEN I

Prefacio	i
-----------------------	----------

Capítulo 1. Introducción

Introducción.....	1
Evolución histórica.....	4

Capítulo 2. Señales, sistemas y procesado de la señal. Comparación entre el procesado analógico y el digital. Aplicaciones

2.1. Señales, sistemas y procesado de la señal.....	7
2.1.1. Tipos de señales según su continuidad en tiempo o en amplitud.....	11
2.1.2. Sistemas analógicos y discretos.....	14
2.2. Comparación entre los sistemas analógicos y los digitales.....	15
2.3. Niveles de aplicación. La cadena básica de procesado digital. Tipos de procesadores.....	18
2.3.1. Subsistema completo de adquisición.....	23
2.3.2. Algunos ejemplos de sistemas de procesado digital.....	25
2.4. Ejemplos introductorios.....	32
2.4.1. Realización digital de un filtro analógico (primera aproximación).....	32
2.4.2. Generación de un eco de una señal analógica.....	34
Ejercicios.....	38

Capítulo 3. Modelos de señales discretas. Clasificación de señales. Operaciones elementales

3.1. Representación de señales discretas.....	41
3.2. Señales básicas.....	42
3.3. Clasificación de señales discretas.....	47
3.3.1. Según la cantidad de información de que se dispone.....	47
3.3.2. Según su contenido energético.....	49
3.3.3. Según su periodicidad.....	49
3.3.4. Según su simetría.....	50
3.3.5. Según el número de variables independientes.....	50
3.4. Operaciones elementales con señales discretas.....	50
3.4.1. Transformaciones de la variable independiente n	50
3.4.2. Operaciones muestra a muestra.....	54
3.5. Modelado de sistemas discretos.....	54

3.5.1. Representación de un sistema discreto en el dominio temporal.....	55
3.5.1.1. Representación analítica.....	55
3.5.1.2. Representaciones gráficas.....	55
3.6. Clasificación de sistemas.....	57
3.6.1. Lineales / no lineales.....	57
3.6.2. Invariantes en el tiempo / variantes en el tiempo.....	57
3.6.3. Estáticos / dinámicos.....	58
3.6.4. Causales / no causales.....	59
3.6.5. De respuesta impulsional finita (FIR) / de respuesta impulsional infinita (IIR).....	59
3.6.6. Estables / inestables.....	60
3.6.7. Inversibles / no inversibles.....	60
3.6.8. Observables. Controlables (alcanzables).....	61
3.6.9. Sistemas MA, AR, ARMA, ARX y ARMAX.....	62
Ejercicios.....	64

Capítulo 4. Muestreo y cuantificación

4.1. Introducción.....	69
4.2. Introducción a los conversores A/D.....	69
4.3. Conversores D/A.....	75
4.4. Muestreo de señales analógicas.....	76
4.4.1. Muestreo ideal.....	76
4.4.2. Muestreo natural (Chopper).....	83
4.4.3. Muestreo real (con ZOH).....	85
4.5. Reconstrucción de la señal muestreada.....	89
4.5.1. Filtrado ideal.....	89
4.5.2. Filtrado práctico.....	91
4.5.3. Aprovechando el ZOH de salida.....	91
4.5.4. Cambiando el ZOH por un operador de orden 1 (FOH).....	94
4.6. Efectos del muestreo en sistemas de lazo abierto y de lazo cerrado.....	95
4.7. Selección práctica del período de muestreo.....	98
4.8. Muestreo de señales paso banda.....	101
4.8.1. Señales paso banda.....	101
4.8.2. Muestreo de señales paso banda.....	103
4.8.3. Muestreo en frecuencia intermedia.....	105
4.9. Cuantificación.....	111
4.9.1. Aspectos elementales.....	111
4.9.2. Error de cuantificación.....	114
4.9.2.1. Cuantificación de una señal senoidal.....	116
4.9.2.2. Cuantificación de una señal aleatoria (gausiana).....	117
4.9.3. Cuantificación no uniforme.....	120
4.10. Fundamentos de la modulación por codificación de pulsos (PCM).....	122
4.11. Aplicación en telefonía.....	125
4.12. Aproximaciones por tramos en telefonía.....	128
4.13. Codificación diferencial de pulsos.....	131
4.14. Moduladores delta y delta-sigma.....	133
4.15. Transmisión asíncrona.....	139
Ejercicios.....	141

Capítulo 5. Señales y sistemas discretos

5.1. Introducción.....	151
5.2. Caracterización en el dominio temporal.....	151
5.2.1. Sistemas LTI.....	152
5.2.2. Respuesta impulsional.....	152
5.2.2.1. Convolución discreta.....	153
5.2.2.2. Álgebra elemental de bloques.....	157
5.2.2.3. Ejemplos de respuestas impulsionales habituales.....	158
5.2.3. Aspectos básicos del análisis de sistemas LTI.....	159
5.2.4. Sistemas definidos mediante ecuaciones en diferencias finitas.....	160
5.2.5. Diagrama de simulación (programación) de ecuaciones en diferencias.....	166
5.2.5.1. Elementos básicos.....	166
5.2.5.2. Alternativas de representación.....	166
5.2.5.3. Diagramas de programación: tipos de realizaciones.....	167
5.3. Análisis en el dominio transformado. Transformada Z.....	171
5.3.1. Respuesta de un sistema LTI a exponenciales complejas.....	171
5.3.2. Relación entre las transformadas de las secuencias de entrada y de salida en un sistema LTI.....	172
5.3.3. Definición.....	173
5.3.4. Transformada Z unilateral: relación con la transformada de Laplace.....	173
5.3.5. Ejemplos de obtención de transformadas Z.....	176
5.3.5.1. Transformada de una secuencia finita y causal.....	176
5.3.5.2. Transformada de una secuencia finita y no causal.....	177
5.3.5.3. Transformada de una secuencia finita y no causal, con respuesta bilateral.....	177
5.3.5.4. Transformada del impulso unitario.....	178
Transformadas de secuencias de duración infinita.....	178
5.3.5.5. Transformada de un escalón unitario.....	178
5.3.5.6. Transformada de una secuencia exponencial.....	179
5.3.5.7. Transformada de dos funciones potenciales.....	179
5.3.5.8. Transformada de una secuencia infinita orientada a izquierdas.....	180
5.3.5.9. Transformada de una secuencia infinita bilateral.....	180
Tabla de transformadas Z.....	182
5.3.6. Convergencia de la transformada Z.....	183
5.3.7. Estabilidad.....	184
5.3.8. Propiedades de la transformada Z.....	187
5.3.8.1. Linealidad.....	187
5.3.8.2. Desplazamiento en el tiempo.....	187
5.3.8.3. Inversión del eje de tiempos.....	187
5.3.8.4. Teorema del valor inicial.....	188
5.3.8.5. Teorema del valor final.....	188
5.3.8.6. Convolución de secuencias.....	188
5.3.8.7. Multiplicación por una secuencia exponencial.....	189
5.3.8.8. Diferenciación de $X(z)$	189
5.3.9. Transformada Z de una ecuación en diferencias. Polos y ceros de la función de transferencia.....	190
5.3.10. Relación entre la posición de los polos y la respuesta impulsional.....	192
5.3.11. Transformada Z inversa.....	193
5.3.12. Diagramas de programación en paralelo y en cascada.....	205
5.3.13. Función de transferencia de un sistema realimentado.....	207
5.3.14. Simplificación de esquemas de bloques.....	208
Ejercicios.....	211

Capítulo 6. Sistemas de control digital

6.1. Introducción.....	229
6.2. Ventajas de los sistemas realimentados.....	231
6.3. El lazo de control. Modelación de plantas analógicas.....	234
6.3.1. Ejemplo: control digital de un motor de corriente continua.....	237
6.4. Análisis.....	244
6.4.1. Precisión.....	244
6.4.2. Velocidad.....	247
6.4.3. Estabilidad.....	248
6.4.3.1. Lugar geométrico de las raíces.....	250
6.4.3.2. Criterio de Jury.....	255
6.5. Diseño.....	259
6.5.1. Técnicas de transformación de diseños analógicos (rediseño digital).....	259
6.5.1.1. Rediseño usando la primera diferencia de retorno.....	260
6.5.1.2. Rediseño usando la transformación bilineal.....	261
6.5.2. Reguladores PID.....	264
6.5.3. Diseño <i>dead-beat</i>	271
6.6. Determinación de la función de transferencia a partir de modelos descritos en el espacio de estado.....	272
Ejercicios.....	275

1

INTRODUCCIÓN

Cuando las aplicaciones del procesado analógico eran las predominantes en el mercado de la electrónica de consumo, era fácil motivar su estudio sobre la base de una presentación de aplicaciones. Los sistemas electrónicos que operan con señales analógicas han sido clásicos en el entorno doméstico: la radio, la televisión, el teléfono, las cadenas musicales convencionales son ejemplos bien conocidos. Así, introducir asignaturas de Electrónica o de Teoría de Circuitos no requiere un gran esfuerzo de motivación ya que el estudiante de Ingeniería conoce de antemano su importancia, sobre todo si ha visto algún circuito impreso (quizás de un aparato estropeado) que le hace intuir la necesidad de conocer los componentes y las bases de diseño (o reparación).

Por el contrario, las aplicaciones del procesado digital se han popularizado más recientemente, aunque de forma espectacular. Ello ha facilitado la introducción del Procesado Digital de Señales, y de una época en que la motivación al estudio dependía una cierta dosis de imaginación se ha pasado a la evidencia actual. Sin embargo, el procesado digital está "oculto": como mucho, al abrir un equipo doméstico (por ejemplo, una tarjeta de sonido de un ordenador personal) pueden verse circuitos integrados en una distribución bastante monótona. Y el procesado digital está "dentro" de algunos de ellos, ya que su fruto son programas informáticos. A diferencia del analógico, los tipos de componentes para soportarlo son mínimos y con una estructura común a muchas aplicaciones. Y por simple inspección visual no se puede adivinar casi nada sobre la función de los dispositivos. El hecho de que sea más reciente que el analógico, unido al hecho de que el desarrollo de aplicaciones requiere unas sólidas bases electrónicas e informáticas, además de las teóricas, también dificulta la toma de contacto con el procesado digital, sobre todo en las etapas previas a la formación universitaria.

Aquellos estudiantes que hayan realizado algún curso de circuitos o de sistemas analógicos van a encontrar, de entrada, una diferencia importante. En un curso de circuitos analógicos se estudian componentes previamente conocidos: las resistencias, los condensadores, los inductores o los transistores son elementos cuya existencia no es novedosa, ni siquiera para los estudiantes de un primer curso de Ingeniería. Por ello, y aunque el curso de circuitos analógicos se centrara sólo en teoremas y estudios analíticos, daría una gran sensación de aplicabilidad sin que el profesor tuviera que esforzarse demasiado. El alumno ya se matricula sabiendo "de qué va" el curso. Por el contrario, el producto final del procesado digital es la elaboración de un software que está más oculto. Dentro de las memorias de los microcomputadores, de los ordenadores personales o de los procesadores digitales de señal está este software, pero, a diferencia de las resistencias y los condensadores, no es observable abriendo un equipo con un destornillador. Por ello es fácil que el estudiante tenga una primera sensación de que el temario es abstracto, al no ser fácilmente traducible a aplicaciones desde el inicio del curso. Se precisarán varios capítulos para que empiece a verse la aplicabilidad de la disciplina.

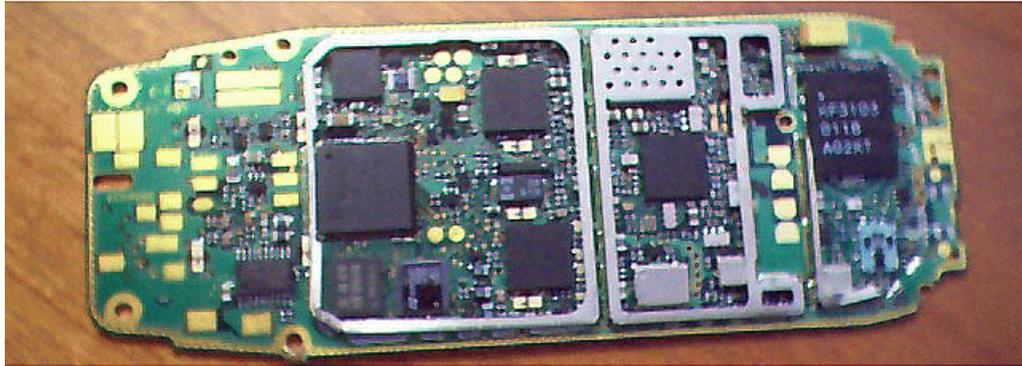


Fig. 1.1. Interior de un terminal de telefonía móvil, donde puede observarse que se usan pocos componentes discretos. El procesamiento de las señales es principalmente soportado por circuitos integrados específicos.

Los sistemas analógicos operan con una señal que continuamente va variando para dar una sensación, normalmente acústica o visual, de mayor o menor intensidad. Pero, si se piensa en productos más modernos, un receptor de radio puede incorporar una función de RDS (*Radio Data System*) que facilita ciertas informaciones sobre el tráfico; el televisor tiene unos mandos que permiten ver el teletexto o incluso detener imágenes; al hablar por un teléfono GSM compartimos frecuencias con otros usuarios sin interferirnos; al marcar un número telefónico equivocado nos podemos encontrar con la respuesta de un fax o de un sintetizador de voz, o la cadena musical que acabamos de comprar es normal que incorpore un lector de los datos almacenados en un disco compacto (CD), o, incluso, un simulador de efectos acústicos emulando diferentes tipos de salas de audición. Estas funciones, relativamente nuevas, que incorporan los equipos clásicos se efectúan de modo digital y coexisten en el mismo equipo con otras funciones analógicas convencionales.

En ciertas ocasiones, es difícil saber si una cierta función es efectuada de forma analógica o digital. Cuando una máquina da un mensaje de "muchas gracias" o de "buen viaje" o dice que el destinatario de una llamada telefónica no está presente, ¿cómo se puede saber si éste procede de una cinta de casete que se ha activado o de un sintetizador digital de voz? Sobre todo si no pueden verse ni el tamaño ni la modernidad de diseño de la caja que contiene al equipo generador del mensaje. Incluso en aspectos menos técnicos puede aparecer esta indeterminación entre lo analógico y lo digital. Por ejemplo, proponemos al lector que se pregunte si cree que el cerebro funciona en tiempo continuo o en tiempo discreto (como sugerencia, recordemos el antiguo juego del lápiz aparentemente blando cuando se balancea suave y horizontalmente entre dos dedos delante de los ojos). Si ha llegado a la conclusión de que el cerebro toma muestras de la imagen en determinados instantes, ¿puede determinar en qué instantes la está observando y en qué instantes no? Dejaremos la solución de este juego para cuando revisemos el teorema del muestreo de Nyquist.

Otros sistemas no electrónicos de tiempo discreto también son bien conocidos: el saldo de una cuenta bancaria; las evoluciones de la bolsa, del paro o de la inflación; el registro hospitalario de la temperatura de un enfermo, por citar algunos ejemplos, no se obtienen continuamente, sino en determinados instantes de tiempo. Cuando los sistemas de tiempo discreto son soportados por tecnologías digitales, se habla de sistemas digitales. Algunas áreas de aplicación del Procesado Digital en Ingeniería son:

- Audio: disco láser, casete digital (DAT), reconocimiento y síntesis de voz, FM digital, ecualizadores digitales, sintetizadores, etc.
- Vídeo: TV digital, visión de robots, reconocimiento de imágenes, mejora de escenas, autoenfoco de cámaras, etc.
- Telecomunicación: telefonía, televisión, transmisión de datos, ecualización de canales, codificación y compresión de mensajes, DAB, DVB, supresión de ecos y de ruidos, multicanalización, etc.
- Control. Robótica: posicionamiento y seguimiento digitales, regulación numérica, interpolación de trayectorias, supervisión de grandes plantas, control y supervisión distribuidos de procesos (SCADA), seguridad en planta, seguimiento de satélites, impresoras láser, rotación de discos, etc.
- Instrumentación: analizadores de espectro de baja frecuencia (FFT), osciloscopios de muestreo, instrumentación de medida programable, generadores de señal de forma arbitraria, etc.
- Transportes: frenado ABS, suspensión adaptativa, guiado inercial, autopilotos, ayuda al aterrizaje, vehículos inteligentes, navegación asistida, etc.
- Geodesia: detección de capas en el subsuelo, estimaciones troposféricas e ionosféricas, predicción de contingencias, etc.
- Medicina: ecografías, electroencefalogramas, electrocardiogramas, tomografía, monitorización fetal, etc.
- Militar: radar, sónar, guiado de misiles, etc.

La evolución tecnológica de la microinformática ha facilitado el desarrollo de esta lista de aplicaciones reales del tratamiento digital de señales. Hace pocas décadas habría sido mucho más reducida, más por limitaciones tecnológicas que por falta de un cuerpo teórico.

Antes de la aparición de los primeros ordenadores, ya existían sistemas que sólo trabajaban con señales muestreadas, aunque eran pocos. El abaratamiento de los ordenadores, así como las facilidades de diseño de sistemas basados en microprocesadores y de circuitos con integración a gran escala (LSI y VLSI), favorecieron la aparición en el mercado de nuevos productos orientados a la manipulación digital de señales analógicas.

Este último matiz es importante para comprender el alcance del procesado digital de señales. No se trata simplemente de sistemas electrónicos secuenciales o combinacionales que efectúan operaciones lógicas con entradas y salidas binarias (como los estudiados en cursos básicos de electrónica digital), sino de sistemas que, además, son capaces de "leer" señales analógicas, "traducirlas" para que puedan ser tratadas digitalmente, efectuar un procesado matemático y "sacar" los resultados de las operaciones digitales de forma analógica. O incluso puede no se precise "leer" o "sacar" las señales analógicas si los destinatarios del procesado digital son, a su vez, sistemas digitales. Con ello se gana en flexibilidad, fiabilidad, transportabilidad y facilidad de ejecución de algoritmos complejos, aspectos que con el procesado analógico son más difíciles de conseguir, al menos a igual coste.

Pero el procesado analógico y el procesado digital no son disciplinas enfrentadas, sino que se complementan: tras fijar las especificaciones y el coste final del equipo, el diseñador no suele tener problemas en tomar una decisión sobre el tipo de procesado que va a usar. Así, por ejemplo, si la estabilidad de los parámetros de un filtro o la facilidad de ajuste son aspectos capitales, será preferible la realización digital, mientras que si el ancho de banda del mismo es muy elevado, deberá optarse por soluciones analógicas.

Por último, conviene recordar que lo último en aparecer no es necesariamente lo óptimo. El amplificador que pueda llevar una muñeca no será el mismo que el de un equipo de alta fidelidad, salvo que se fabriquen muñecas para arruinarse, ni los filtros de cabecera de un receptor de TV por satélite serán digitales, si éste tiene que tener un coste competitivo. Aunque deberán revisarse cada año estos ejemplos, porque la tendencia al abaratamiento de las tecnologías digitales y al aumento de velocidad (ancho de banda) van a obligar, a medio plazo, a adaptarlos a la situación tecnológica del momento.

Evolución histórica

Hasta la década de los cincuenta el procesado de señales era realizado casi exclusivamente por sistemas analógicos, ya fuesen éstos de tipo mecánico, neumático o eléctrico. A pesar de que los primeros ordenadores ya empezaban a introducirse, se trataba de máquinas lentas, voluminosas y de bajas prestaciones. A esto había que añadir su elevado coste frente a la economía de la circuitería analógica desarrollada hasta la fecha; receptores de radio, amplificadores, reguladores, etc., eran ya comercializados a precios relativamente bajos. Y, además, no había suficiente experiencia de usuario, por lo que el hecho de que un determinado equipo efectuara una función era, en ocasiones, mucho más importante que la calidad con la que la realizara.

Sin embargo, había problemas que, por su complejidad, no habían sido bien resueltos mediante el procesado analógico de señales y para los cuales el digital parecía una alternativa interesante. Uno de los primeros usos del procesado digital fue la prospección de pozos petrolíferos: las señales acústicas registradas por una serie de sensores eran grabadas en cinta y luego analizadas por ordenador. De los datos registrados podía deducirse la composición del subsuelo y, por tanto, la posible presencia de bolsas de petróleo. El proceso podía durar incluso días y consumiendo cantidades ingentes de energía y paciencia. Sin embargo, siempre resultaba más barato y más rápido que realizar perforaciones tentativas.

También resultó interesante la aplicación de computadores a la simulación de circuitos y sistemas analógicos, pues así se reducían riesgos en la elaboración de los prototipos. Los pioneros en este tipo de simulaciones fueron los laboratorios Bell y Lincoln.

Fuera de estas aplicaciones, dada la imposibilidad de procesar señales discretas en tiempo real, el procesado digital era más una curiosidad o una solución puntual de determinados problemas, que una herramienta práctica. De todos modos, el tema atrajo a un buen número de investigadores, en parte por su interés formal y, en mayor medida, como consecuencia de los sistemas muestreados en radar que se habían desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial. La transformada Z fue apuntada por Hurewicz en 1947, si bien la definieron posteriormente Ragazzini y Zadeh, al mismo tiempo que Barker, en 1952.

Muchos algoritmos actuales de procesamiento digital tienen su origen a finales de la década de los cincuenta y, especialmente en la de los sesenta. Por ejemplo, el algoritmo de cálculo rápido de transformadas de Fourier (FFT) fue ideado por Cooley y Tuckey en 1965. También fue en esta época cuando aparecieron libros como los de B. Gold y C.H. Rader, o el de E.I. Jury, que estructuraban el cuerpo teórico del procesamiento digital y el uso de sus principales herramientas. Incluso el filtro de Kalman, tan importante en recientes trabajos de investigación, fue propuesto durante esta década.

En el campo del Control, durante la década de los cuarenta empezó a mostrarse interés por la utilización de sistemas muestreados en radar giratorio. Pero una nefasta experiencia en unas pruebas de aplicación de un controlador digital a un helicóptero relegaron hasta finales de la década de los setenta la confianza en los métodos digitales de control, en parte gracias a la comercialización de los miniordenadores.

El impulso definitivo no llegaría hasta la década de los ochenta. Los avances en microelectrónica permitieron pasar de los primeros microprocesadores de la década anterior a dispositivos más potentes y capaces de calcular algoritmos complejos en tiempo real. Al principio su ancho de banda era muy limitado, suficiente para aplicaciones de Control pero pobre para las de Comunicaciones. A finales de los ochenta, con la comercialización de los primeros DSP (procesadores digitales de señal), se dio un paso muy importante. Un DSP es, básicamente, un microprocesador con una arquitectura y un conjunto de instrucciones específicos, orientados a la programación de algoritmos de procesamiento de señal en que es más importante la velocidad de cálculo que la capacidad de memorización de datos. Los nuevos horizontes tecnológicos para el procesamiento digital de la señal parecen tender hacia sistemas de paralelismo masivo: redes neuronales, *transputers*, etc. La aparición de los DSP ha creado un lazo de realimentación positiva: gracias a ellos, se han promovido líneas de investigación y nuevas aplicaciones comerciales del procesamiento digital, que permiten seguir mejorando las prestaciones de los DSP.

Hoy en día el control digital de procesos y de dispositivos ha relevado al analógico en muchas aplicaciones. La nefasta experiencia aeronáutica de hace cinco décadas, que parecía restar fiabilidad a los sistemas de control digital, ha resultado ser sólo una paradoja pues, entre otros aspectos, los sistemas digitales se han manifestado más fiables, versátiles y productivos que los analógicos. Por ejemplo, muchos equipos de regulación son más fáciles de encontrar en el mercado, y más económicos, si son digitales. Desde los autómatas programables, sencillos de aplicar y potentes en la resolución de problemas industriales, hasta los potentes algoritmos de control robusto o adaptativo, el control digital ha participado en todos los niveles de la automatización. Los sistemas distribuidos de adquisición de datos y control (SCADA), poco explotados hasta hace sólo un par de décadas, son ahora habituales en aplicaciones de control de procesos.

A diferencia de las aplicaciones para Comunicaciones, las de Control Digital no han sido tan sensibles a la aparición de los DSP para su penetración en el mercado (aunque hay DSP específicos para aplicaciones de control), debido a sus menores exigencias en velocidad de respuesta. Tecnológicamente, los factores más importantes han sido el paso de los primeros μP a los microcontroladores actuales, la aparición de circuitos integrados especializados en el control digital de tareas específicas (como el de los movimientos de motores eléctricos) y la incorporación de buses de intercambio de datos entre instrumentos de control y medida.

2

SEÑALES, SISTEMAS Y PROCESADO DE LA SEÑAL. COMPARACIÓN ENTRE EL PROCESADO ANALÓGICO Y EL DIGITAL. APLICACIONES

2.1. Señales, sistemas y procesamiento de la señal

En primer lugar, en este capítulo se revisan algunas terminologías y conceptos básicos de señales y sistemas:

Señal: Magnitud asociada a un fenómeno físico, función de una o varias variables independientes, que puede ser revelada por un instrumento o percibida directamente por el ser humano. En nuestro contexto, esta definición puede simplificarse diciendo que es una "magnitud (eléctrica) cuya *variación con el tiempo* representa una información". Ejemplos de señal son la tensión en bornes de un micrófono, el cambio de un semáforo, una sirena de alarma, etc. Las señales pueden servir tanto para las comunicaciones entre personas, como entre personas y máquinas o, simplemente, entre máquinas.

Información: Conocimiento de algo desconocido o inesperado.

Mensaje: Manifestación física de la información. Si ésta toma forma eléctrica, se denomina *señal*.

Sistema: Interconexión de dispositivos o de circuitos (subsistemas) que efectúan algún tipo de operación sobre la señal. Por ejemplo, un osciloscopio, un equipo de HI-FI, un televisor, una red inalámbrica, etc.

Como ejemplo de estos conceptos, se presenta la estructura general de un sistema de comunicaciones. Sus elementos básicos, siguiendo el modelo propuesto por Shannon a finales de los años cuarenta, se describen en la figura 2.1.

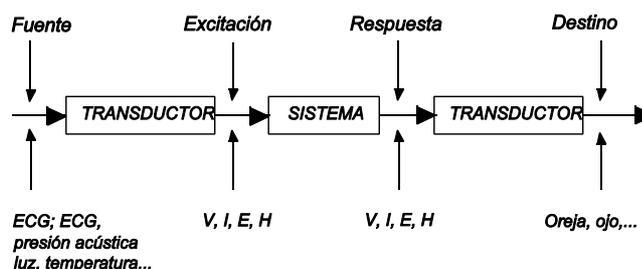


Fig. 2.1. Sistema de comunicación

La *fente* proporciona un mensaje de entrada a partir de cualquier magnitud física (presión en un micrófono, velocidad de un disco, etc.). Este mensaje, normalmente en formato no eléctrico, es convertido en una onda de tensión o de corriente mediante un *transductor*. A la salida del sistema se efectúan las operaciones inversas hasta que la información llega al *destinatario*.

Dentro del bloque que se ha denominado *sistema* se hallan un emisor, un canal y un receptor. El objetivo del *emisor* (o transmisor) es adaptar la señal de entrada al medio físico (*canal*), buscando la *fidelidad* (semejanza entre la información recibida y la transmitida) y la *fiabilidad* (probabilidad de que la comunicación tenga un cierto índice de confianza). El medio físico de transmisión puede tener características muy distintas (líneas unifilares o bifilares, cables, guíasondas, fibra óptica, atmósfera, agua...)

PROBLEMAS: Dentro de un sistema de comunicación pueden presentarse tres tipos de perturbaciones de la señal transmitida: los ruidos, las interferencias y las distorsiones.

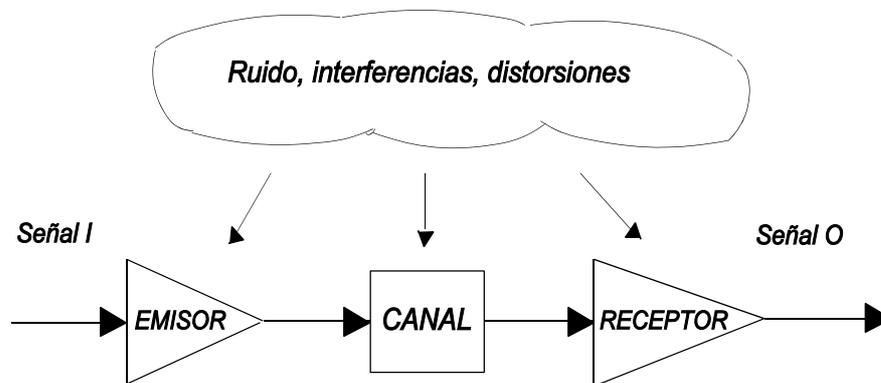


Fig. 2.2. Perturbaciones en un sistema de comunicación

- **Ruidos:** Son generados por los subsistemas emisor y receptor, por el propio canal o por los medios materiales que los envuelven (ruido propio de los componentes electrónicos, tráfico, ionosfera, entonos industriales...). Son inevitables y de naturaleza aleatoria.

- **Interferencias:** Son perturbaciones debidas a la superposición de otras señales procedentes del mismo sistema u otros sistemas cercanos a la señal transmitida (ruido de la red eléctrica, canales de televisión cercanos...). Son evitables con un correcto apantallamiento o limitación de la banda de frecuencia en que se opera, cuando ello es posible.

- **Distorsiones:** Son debidas al funcionamiento imperfecto de algún subsistema que cambia la forma de la señal (transistor saturado, dispositivos no lineales...). Es una perturbación asociada a la forma de la señal y, a diferencia de las restantes, desaparece si ésta se anula. No hay distorsión si los subsistemas son lineales y su diseño electrónico es correcto, aunque el uso exclusivo de dispositivos lineales es poco viable en aplicaciones reales si no es pagando costes adicionales, como el precio de los equipos o el consumo energético.

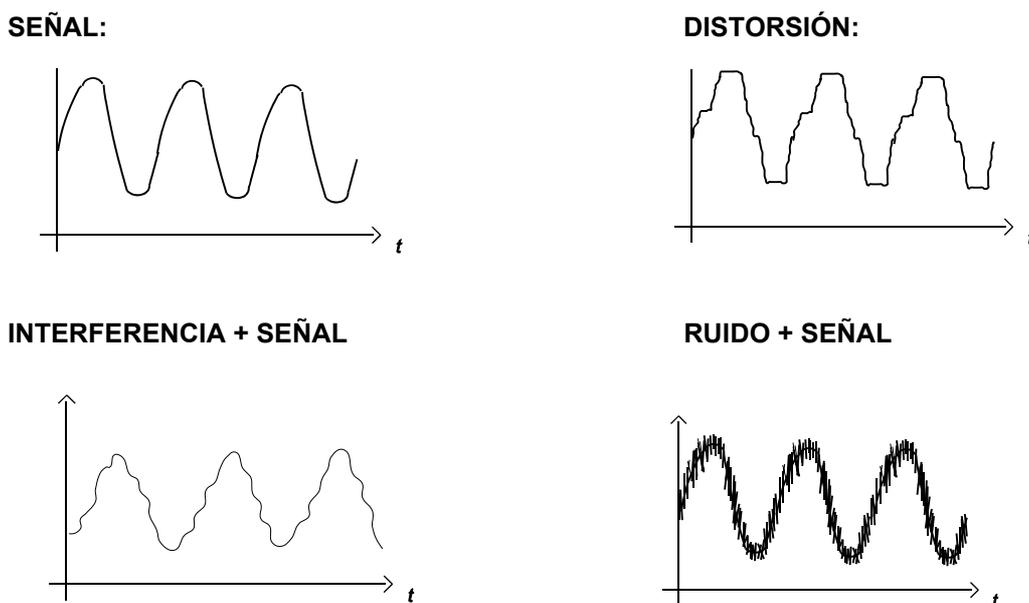


Fig. 2.3. Diferentes perturbaciones de una señal

Si se toma, como ejemplo, el siguiente comportamiento espectral de las contaminaciones:

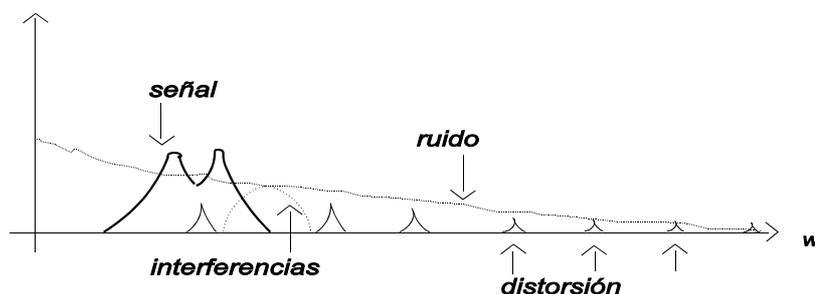


Fig. 2.4. Efecto espectral de las perturbaciones

pueden plantearse algunas formas de reducción del problema:

a) **FILTRADO:** Elimina las contaminaciones de la señal que están fuera de la banda de paso del filtro, que se supone ajustada a la banda de interés de la señal. Según si el filtro es analógico o digital, se habla de *procesado de la señal* analógico o digital.

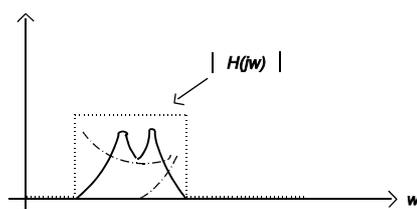


Fig. 2.5. Filtrado lineal paso-banda

b) Desplazamiento en frecuencia de la señal a una zona menos contaminada (propiedad de **MODULACION** de la transformada de Fourier). Es otro ejemplo de *procesado de la señal*.

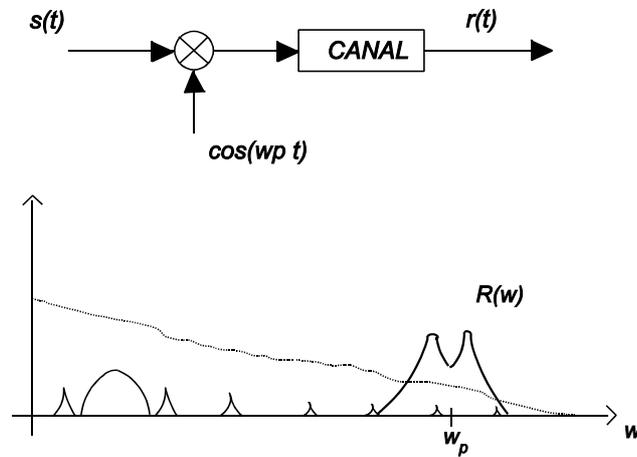


Fig. 2.6. Modulación en amplitud

c) **CODIFICACIÓN:** Es otra acción de *procesado de la señal* en que, después de un proceso de cuantificación de ésta, se asigna una palabra-código a cada nivel cuántico. Si a esta palabra se le añade información (bits) adicional, es posible corregir errores. Por ejemplo, si se conviene que el código 111 corresponde al color verde y el 000 al azul, y por algún problema en el canal se ha recibido el código 110, puede decidirse, con mayor probabilidad de acierto, que se ha transmitido el código correspondiente al color verde (ya que dos de los tres símbolos son correctos).

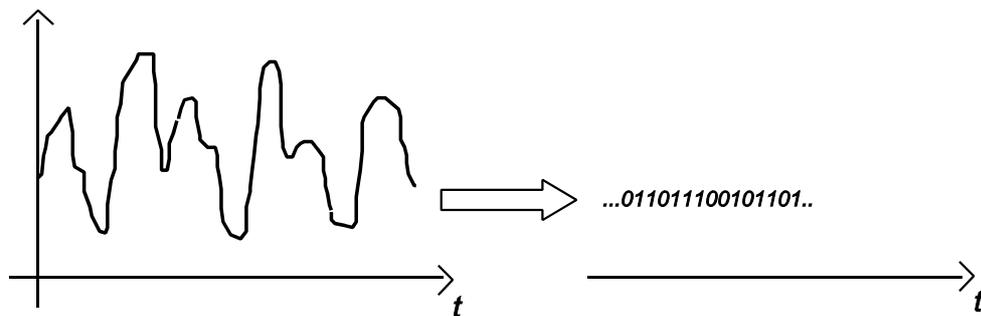


Fig. 2.7. Codificación

Según las ideas introducidas en este ejemplo, puede definirse el procesado de la señal en *comunicaciones* del modo siguiente:

PROCESADO DE LA SEÑAL: Cualquier manipulación de la señal transmitida o recibida, o de sus perturbaciones, orientada a mejorar la calidad o el coste de las comunicaciones.

3

MODELOS DE SEÑALES DISCRETAS. CLASIFICACIÓN DE SEÑALES. OPERACIONES ELEMENTALES

3.1. Representación de señales discretas

En adelante se usarán corchetes para indicar las variables independientes de las funciones de tiempo discreto. Así, $x[n]$ indica una secuencia x , donde n es un número entero indicador del n -ésimo elemento de la secuencia. Los paréntesis $()$ se reservan, como es habitual en otras disciplinas, para indicar las variables independientes de funciones de tiempo continuo.

A menudo, la secuencia $x[n]$ procede de un muestreo periódico de una función analógica $x_a(t)$. Si las muestras se adquieren a intervalos regulares de T segundos (T = tiempo de muestreo), se puede escribir:

$$x[n] = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$$

El término nT indica el tiempo transcurrido hasta la n -ésima muestra, y se indica entre paréntesis $()$ porque puede corresponder a un número real no entero. El símbolo $[\]$ puede interpretarse como un recordatorio de que la variable independiente contenida en su interior debe multiplicarse por T para su interpretación en tiempo continuo.

· Representación tabular

Los valores de $x[n]$ para cada valor de n (n = número de la muestra) se detallan en una tabla.

Ejemplo:

n :	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$:	0	2	1	2	0	-1	-2	2

· Representación funcional

En este caso, se da el término general de la expresión.

Ejemplo:

$$x[n] = 3n^2 - 5$$

· Representación gráfica

Para cada valor de n se dibuja una línea vertical de longitud proporcional al valor de $x[n]$ que le corresponda.

Ejemplo: Se pueden representar las dos secuencias anteriores:

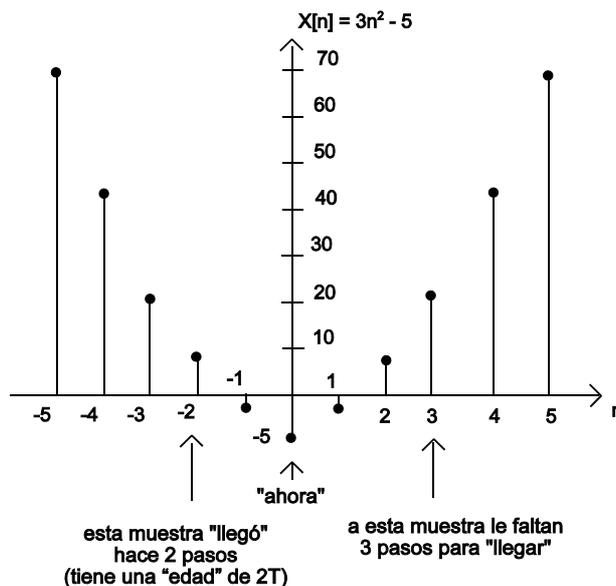
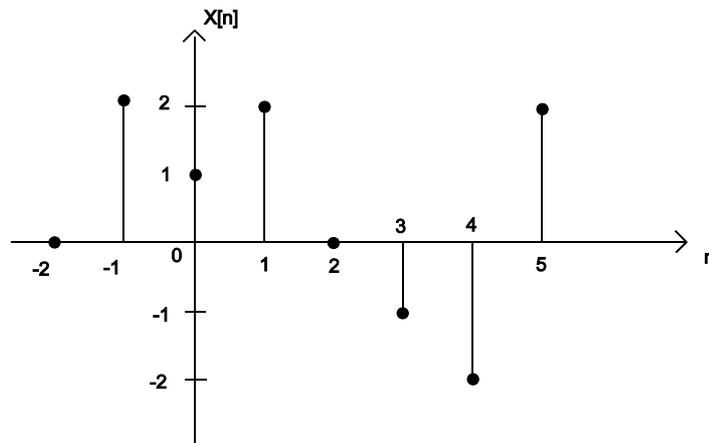


Fig. 3.1. Representación gráfica de secuencias

3.2. Señales básicas

Las señales que se presentan a continuación son las más elementales. Por un lado, su interés radica en su uso como señales de prueba para caracterizar sistemas discretos; por otro, en que, como se verá en posteriores capítulos, cualquier señal periódica puede descomponerse como una suma de algunas de las señales que se van a introducir.

· Impulso unidad $\delta[n]$

Definición:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

El índice n es el contador del número de la muestra. Si han transcurrido T segundos entre el instante n y el anterior, $n-1$, el producto $n \cdot T$ da como resultado el instante de tiempo en que aparece la muestra.

Ejemplos:

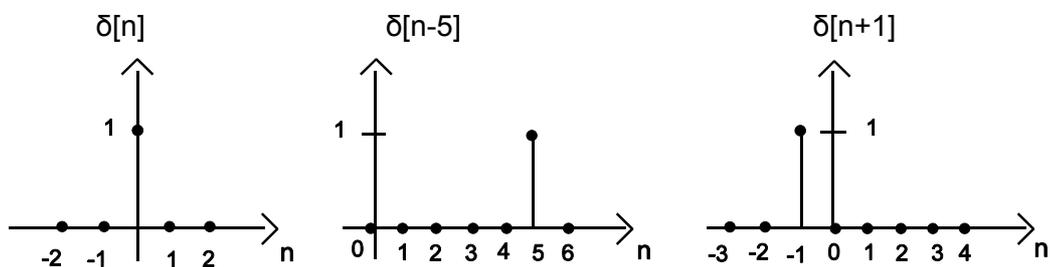


Fig. 3.2. Ejemplos de funciones impulso

· Escalón unidad $u[n]$

Definición:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ejemplos:

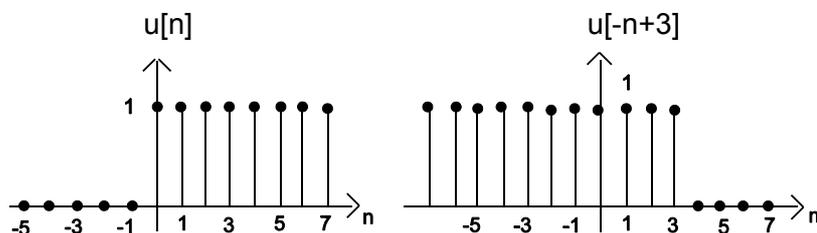


Fig. 3.3. Ejemplos de funciones escalón

Propiedades:

$$\bullet \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (3.3)$$

4

MUESTREO Y CUANTIFICACIÓN

4.1. Introducción

En este capítulo se estudian las principales formas de muestrear y de reconstruir señales analógicas, se analizan las limitaciones de los diferentes métodos y se presentan soluciones para reducir los efectos indeseados de estas limitaciones.

Los procesos de muestreo y la posterior reconstrucción de señales analógicas son capitales en los sistemas de procesamiento digital, y la calidad del sistema global está muy condicionada por el diseño correcto de las etapas interfaz entre el computador y las entradas y salidas analógicas. En el presente capítulo su estudio se va a realizar independientemente del algoritmo digital que deba soportar el computador.

También, se estudiará el proceso de cuantificación de señales, inevitable al trabajar con procesadores de aritmética finita (y, por tanto, incapaces de trabajar con valores continuos en amplitud), y se evaluarán los errores y los ruidos que este proceso puede conllevar.

Antes de entrar en los aspectos matemáticos del análisis, se hace una introducción a la tecnología que soporta las funciones de muestreo y cuantificación, de forma que el lector pueda ir relacionado aspectos circuitales con otros más formales. Los ingenieros que vayan a diseñar sistemas de muestreo y de reconstrucción (módulos de entradas y salidas analógicas) han de tener una cierta formación interdisciplinaria, que incluya conocimientos de programación, especialmente de lenguaje ensamblador y de lenguaje C, de funciones electrónicas y de aspectos matemáticos del procesamiento digital de señales. En el apéndice C, se ofrece información complementaria sobre los principales aspectos tecnológicos a considerar a la hora de seleccionar convertidores A/D y D/A.

4.2. Introducción a los convertidores A/D

Como ya se ha avanzado en el capítulo anterior, el objetivo de los convertidores A/D (también denominados en ocasiones convertidores C/D, continuo-discreto, o convertidores ADC, *Analog to Digital Converters*) es adquirir muestras de la señal analógica presente a su entrada y convertirlas en códigos digitales inteligibles por los restantes elementos de la cadena digital.

Hay muchos tipos de convertidores A/D, que se diferencian por el grado de idealidad de su funcionamiento, la velocidad de conversión, la inmunidad al ruido o el precio. El objetivo del presente apartado es proporcionar una visión tecnológica, previa a otros temas más formales sobre teorías del muestreo de señales, que permita al estudiante

relacionar ciertas funciones matemáticas con algunos circuitos capaces de soportarlas, pero sin pretensiones de ser un curso de subsistemas electrónicos. Para lograr este objetivo, se ha escogido el conversor A/D paralelo (tipo "flash"), basado en una batería de amplificadores operacionales que trabajan como comparadores, y que se caracteriza por ser rápido de funcionamiento, relativamente costoso y muy sensible a tolerancias en sus componentes (es fácil localizar conversores que puedan adquirir señales analógicas de frecuencias hasta las decenas de MHz, aunque en el mercado también se hallan conversores capaces a operar a centenares de MHz, y empresas como Agilent o Tektronix han desarrollado placas de conversores a velocidades de hasta decenas de giga-muestras/s - un giga = mil millones - para sus osciloscopios de muestreo). Su esquema general de funcionamiento es el que se indica en la figura 4.1 (si bien, por facilidad de representación, se ha indicado un conversor de 4 niveles, los conversores habituales son de más bits: de 8, 12, y 14 bits). Como es fácil verificar en la figura 4.1, a medida que el valor de la tensión de entrada V_{in} va superando los niveles fijos de referencia V_1, V_2, V_3 y V_4 , las salidas D, C, B y A, respectivamente, van cambiando de nivel.

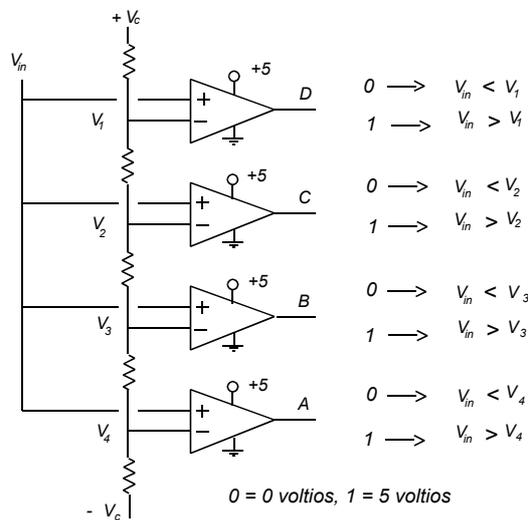


Fig. 4.1. Conversor paralelo elemental

En la figura 4.2 se ilustran los valores que van adquiriendo las salidas A,B,C y D para una determinada evolución de la tensión de entrada V_{in} .

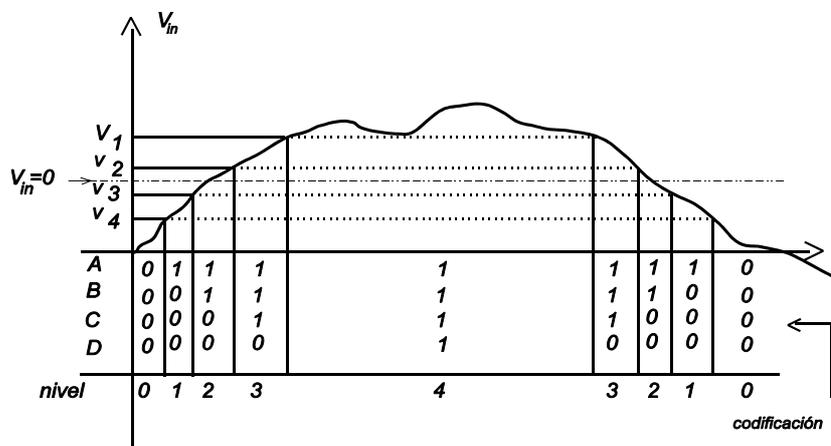


Fig. 4.2. Codificación. Los niveles de tensión v_1, v_2, v_3 y v_4 son los de la figura 4.1

Los μP suelen leer los datos en código hexadecimal, por lo que después de los comparadores hay un circuito codificador que proporciona un código fácil de leer por el μP .

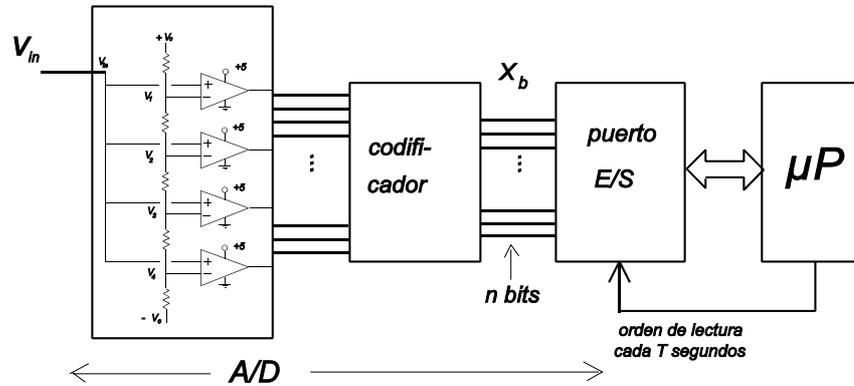


Fig. 4.3. Conexión a un microprocesador

Las dos funciones de conversión A/D y de codificación se efectúan en el mismo circuito integrado.

Como con n bits pueden cuantificarse 2^n niveles, cada uno de valor $\Delta = x_m/2^n$, siendo x_m el margen dinámico de la cuantificación, la señal x_b de la figura anterior puede interpretarse como un conjunto de muestras cuantificadas en 2^n niveles (si $n = 8$ bits, hay 256 niveles cuánticos).

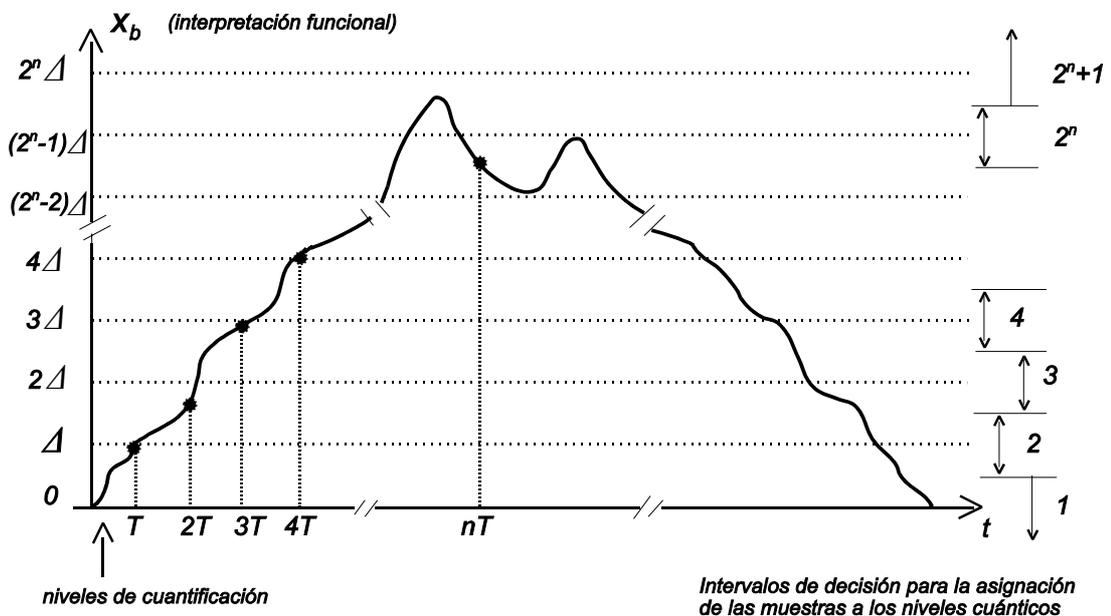


Fig. 4.4. Muestreo de una señal unipolar de valores comprendidos entre 0 y x_m (con indicación de los niveles de cuantificación)

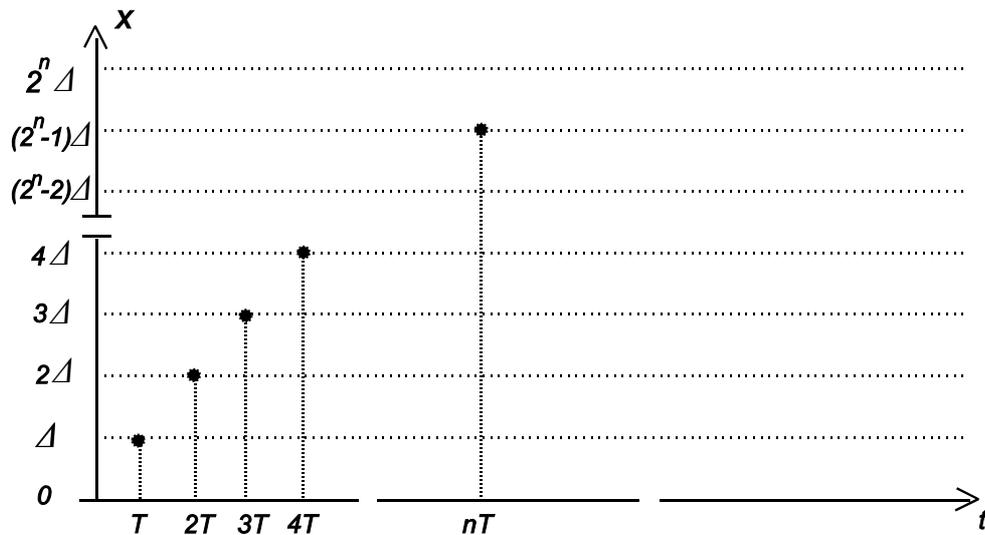


Fig. 4.5. Cuantificación de la señal muestreada de la figura anterior

Los niveles funcionales de la figura 4.5 representan el valor matemático de la salida del conversor A/D. Pero, insistimos, son niveles funcionales, no eléctricos. No se verían así en un osciloscopio. Ello es debido a que en el circuito integrado del conversor hay, además, un codificador que proporciona directamente al μP unos códigos digitales (tensiones) cuyo contenido (palabra digital) es la descripción digital de la amplitud de las muestras. Es decir, funcionalmente el conversor muestrea la señal de entrada y asigna las muestras a unos valores cuantificados (figura 4.6-B). Eléctricamente, es un dispositivo que a su salida entrega tensiones relacionadas con estos valores codificados (palabras digitales) para que sean interpretables por el μP (figura 4.6-A).

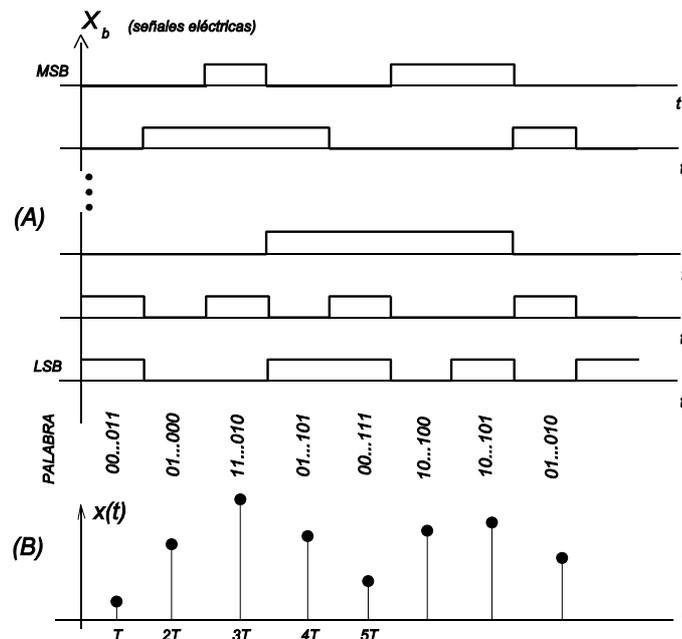


Fig. 4.6. (A) Lectura de la señal codificada por el bus de datos de un microcomputador (LSB: Least Significant Bit; MSB: Most Significant Bit'). (B) Secuencia equivalente interpretada por el software dentro del microcomputador

5

SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

5.1. Introducción

En este capítulo se estudian las señales y los sistemas discretos lineales e invariantes (sistemas LTI) tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la transformada Z . Si bien la realidad física dice que los sistemas físicos suelen tener un cierto grado de alinealidades y de comportamiento variante con el tiempo, también es cierto que estos aspectos suelen ser menores en el comportamiento global del sistema, en muchos casos. Por ejemplo, en electrónica analógica, un amplificador de potencia de audio varía sus características a medida que los transistores (dispositivos intrínsecamente no lineales) se van calentando; sin embargo, esta variación suele ser tan pequeña que un modelo lineal e invariante en el tiempo –y, por tanto, simplificado– de su comportamiento suele ser suficiente para su estudio en pequeña señal. Los sistemas LTI son los más habituales en el modelado de sistemas físicos, y sobre ellos se puede desarrollar un conjunto compacto de herramientas de análisis y diseño. Precisamente gracias a la disponibilidad de este conjunto universal de herramientas para el análisis de sistemas LTI, en muchas ocasiones los sistemas no lineales se tratan aproximándolos a sistemas lineales para poder utilizar herramientas compactas y sencillas en su análisis.

5.2. Caracterización en el dominio temporal

Los conceptos que se introducen en este apartado son básicos y, por tanto, capitales para posteriores profundizaciones; tal es el caso de la respuesta impulsional o de la convolución de secuencias. Asimismo, se aborda un primer estudio de ciertas características de los sistemas, como su inversibilidad, su causalidad o su estabilidad, las cuales serán el punto de partida para la realización de diseños. El apartado se concluye con una primera aproximación a los diagramas de programación en formas directas, dejándose para más adelante otras formas de programación. Es importante resaltar que, a diferencia de los sistemas continuos, la convolución no será sólo una herramienta de análisis, sino que también será una alternativa para la implementación (programación) de filtros digitales con la que se podrá ir calculando la salida $y[n]$ del filtro a partir de su respuesta impulsional $h[n]$ y de las muestras de la entrada $x[n]$.

El cálculo de algunas relaciones que aquí se introducen será más eficiente en otros dominios, como es el plano Z (de igual modo que la transformada de Laplace simplifica ciertos estudios de sistemas continuos), por lo que se insistirá más en sus aspectos conceptuales que en el dominio de una operatividad que, en el dominio temporal, resultaría desproporcionadamente dificultosa.

También se introduce un apartado dedicado a las ecuaciones en diferencias. Si bien su resolución en el dominio temporal es más dificultosa (excepto para ejemplos sencillos)

que con otras herramientas que se verán posteriormente en este mismo capítulo, se ha considerado interesante mantener este tema a fin de que el lector vea la dualidad entre las ecuaciones en diferencias y la transformada Z respecto a las ecuaciones diferenciales y la transformación de Laplace para sistemas de tiempo continuo.

5.2.1. Sistemas LTI: respuesta impulsional

Los sistemas lineales e invariantes (LTI) se caracterizan por cumplir las propiedades siguientes:

a) Linealidad:

Un sistema es lineal si y sólo si podemos aplicar el principio de superposición.



Fig. 5.1. Sistema lineal

Dadas dos señales de entrada diferentes $x_1[n]$ y $x_2[n]$, con salidas $y_1[n]$ e $y_2[n]$, respectivamente, se cumple:

$$k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n] \quad (5.1)$$

siendo k_1 y k_2 constantes.

b) Invarianza temporal:

Si la respuesta del sistema $y[n]$ sólo depende de T y de la entrada $x[n]$, pero no del instante de tiempo en que se aplica la entrada, se dice que es invariante en el tiempo, o t-invariante.

En este caso, si en el instante de muestreo n se obtiene una salida $y[n]$ para una entrada $x[n]$, un desplazamiento temporal de la entrada al instante $n-n_0$ da la misma salida, pero también desplazada a $n-n_0$, es decir, $y[n-n_0]$.



Fig.5. 2. Sistema invariante en el tiempo

5.2.2. Respuesta impulsional

Los sistemas LTI quedan determinados a partir de su respuesta impulsional, la cual se define como la respuesta del sistema a una función delta.

$$\begin{aligned} T\{\delta[n]\} &= h[n] \\ T\{\delta[n-k]\} &= h[n-k] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Toda señal discreta se puede representar como una suma, ponderada por el valor de las muestras, de funciones delta desplazadas a lo largo de los instantes de muestreo:

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k] \quad (5.3)$$

donde $x[k]$ se corresponde con el valor de la muestra en el instante k . Así, aplicando superposición e invarianza:

$$\begin{aligned} y[n] = T\{x[n]\} &= T\left\{\sum_k x[k] \delta[n-k]\right\} = \sum_k x[k] T\{\delta[n-k]\} \\ &= \sum_k x[k] h[n-k] = x[n] * h[n] \end{aligned} \quad (5.4)$$

se obtiene que la respuesta del sistema no es más que la *convolución* de la excitación $x[n]$ con la respuesta impulsional $h[n]$.

5.2.2.1. Convolución discreta (suma de convolución)

La convolución de dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$ se define de la forma siguiente:

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_m x[m] y[n-m] = \sum_m x[n-m] y[m] \quad (5.5)$$

Propiedades:

a) *Conmutativa*: $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n] &= \sum_k x[k] h[n-k] \quad (k = n-m) \\ &= \sum_m x[n-m] h[n-(n-m)] = \sum_m x[n-m] h[m] \\ &= \sum_m h[m] x[n-m] = h[n] * x[n] \end{aligned} \quad (5.6)$$

b) Asociativa: $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$

$$\begin{aligned}
 x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) &= \sum_{k' \&('} x[k'] (h_1[n \&'k'] * h_2[n \&'k']) \\
 &= \sum_{k' \&' } \sum_{m' \&' } x[k'] h_1[m'] h_2[n \&'k' \&'m'] \quad (m' \&'k' \&'n) \\
 &= \sum_{m' \&' } \sum_{k' \&' } x[k'] h_1[m'] h_2[n \&'k' \&'m'] \\
 &= \sum_{m' \&' } (x[m'] * h_1[m']) h_2[n \&'m'] \\
 &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

c) Distributiva: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

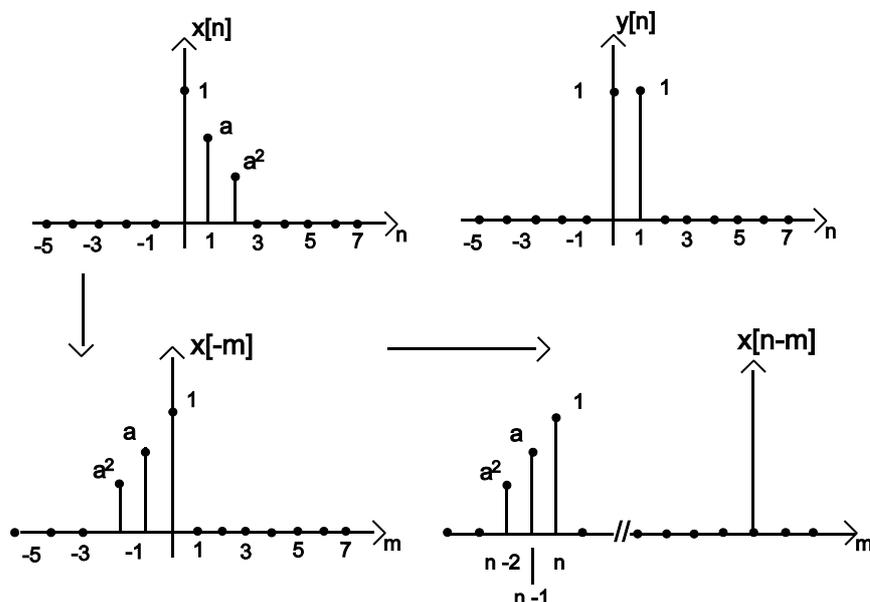
La demostración de esta propiedad se propone como ejercicio.

Ejemplo de convolución gráfica:

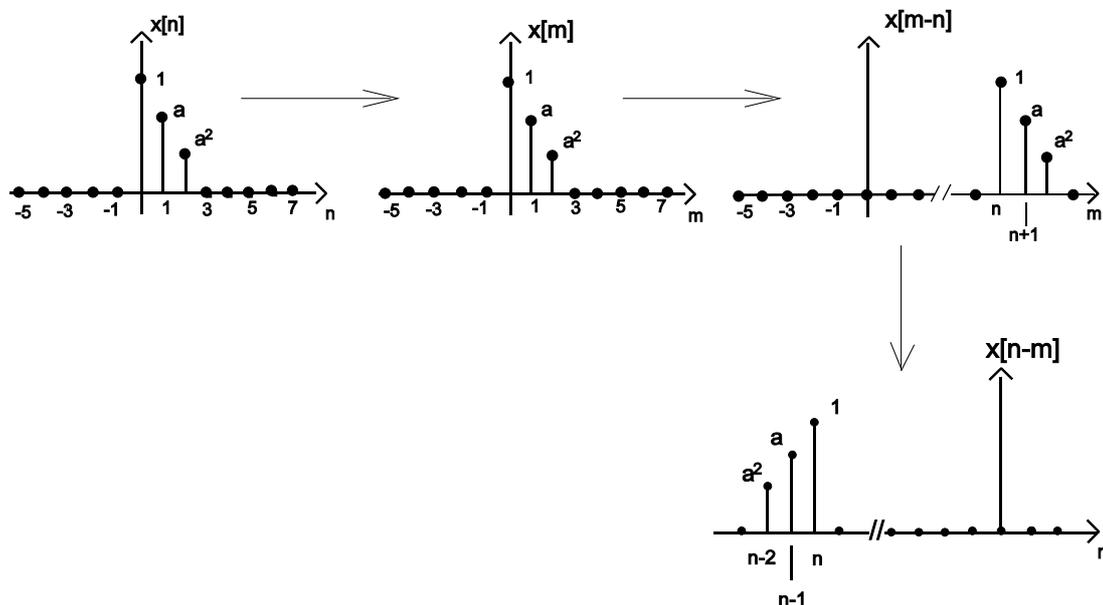
Se trata de determinar gráficamente el resultado de la operación de convolución de la ecuación 5.5:

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{m' \&' } x[m'] y[n \&'m'] = \sum_{m' \&' } x[n \&'m'] y[m']$$

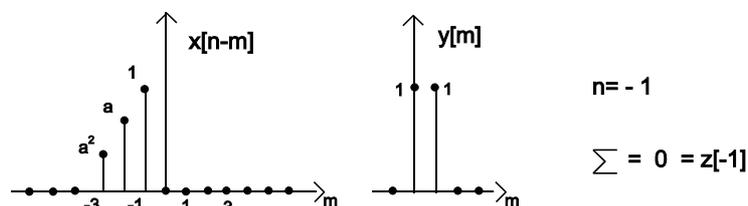
El primer paso consiste en preparar el término $x[n-m]$ –igualmente se habría podido optar por $y[n-m]$. Para ello, se invierte (reflexión sobre el eje de tiempos) y se desplaza una de las señales sobre el eje de tiempos m .



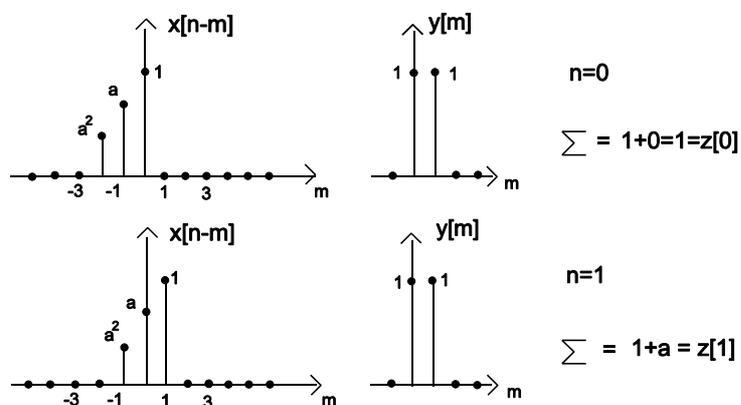
Otra alternativa para obtener $x[n-m]$ es representar $x[m]$, desplazarla n muestras hacia la derecha, $x[m-n]$, y hacer una reflexión del resultado:

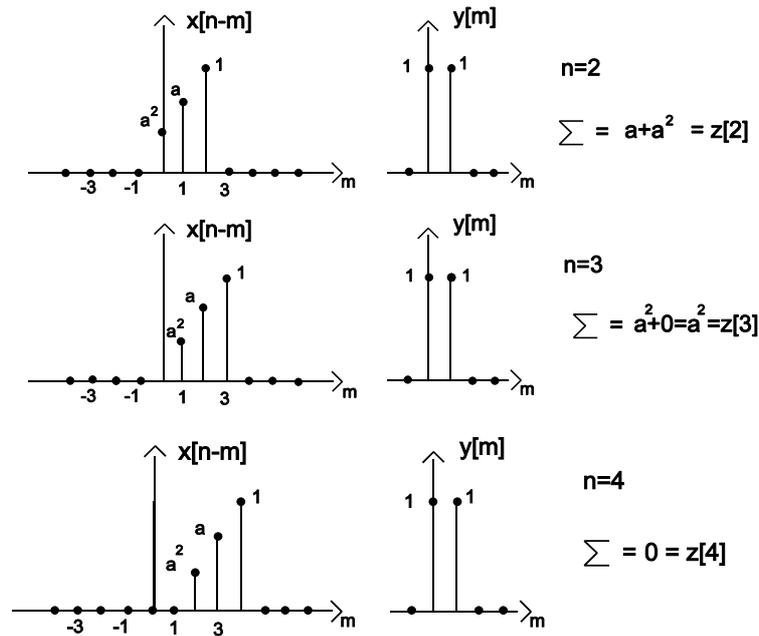


El siguiente paso es ir desplazando $x[n-m]$ muestra a muestra (dando valores a n):

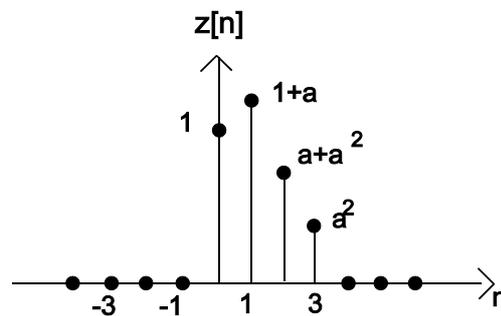


(todas las muestras anteriores a $n = 0$ son cero).





Por tanto, la secuencia obtenida será:



Se puede observar que la longitud (duración) de la secuencia resultado de la convolución es la suma de las longitudes de las dos secuencias a convolucionar, menos uno:

$$Lz = Lx + Ly - 1 \quad (5.8)$$

(L: longitud de la secuencia)

A la vista del anterior ejemplo de convolución gráfica y conociendo la longitud del resultado de la convolución por la ecuación (5.8), es fácil diseñar algoritmos para el cálculo de la convolución de dos secuencias. Entre los diferentes algoritmos que recoge la bibliografía son bastante eficientes los denominados *sistólicos*, basados en bucles anidados. Sin embargo, como se verá más adelante (en el apartado 8.12), es computacionalmente más eficiente en número de operaciones y, por tanto, en tiempo de cálculo, seguir un camino que en este momento puede parecer extraño: el cálculo de la convolución mediante los algoritmos de la transformada rápida de Fourier (FFT), lo que conlleva operar en el dominio transformado convirtiendo la operación de

convolución en multiplicaciones, para después antitransformar el resultado. Algo que no debe extrañar ya que también era un camino alternativo (y el usual) en el caso de los sistemas de tiempo continuo. Pero esto será objeto de estudio en el capítulo 8.

5.2.2.2. Álgebra elemental de bloques

Aplicando las propiedades anteriores de la convolución a las conexiones más básicas entre subsistemas lineales, pueden simplificarse algunos diagramas de bloques.

Cascada

Siguiendo los pasos indicados en la figura siguiente, se observa que dos bloques lineales y conectados en cascada son conmutables.

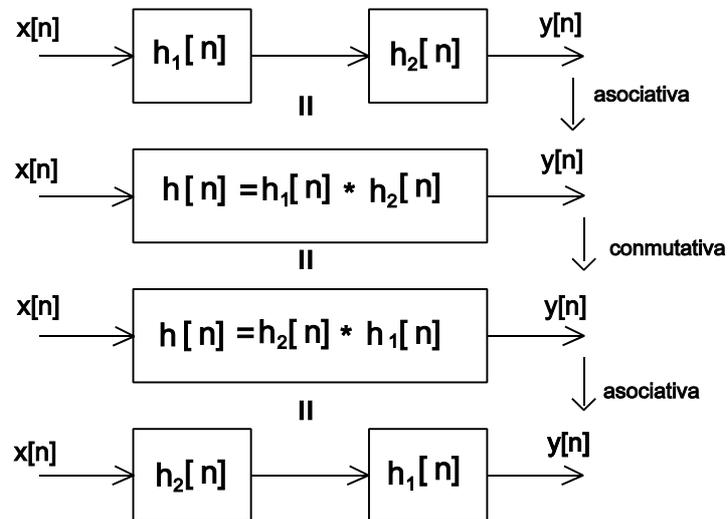


Fig. 5.3. Conexión en cascada de sistemas LTI

Paralelo

La respuesta impulsional de dos sistemas LTI conectados en paralelo es la suma de sus respuestas impulsionales.

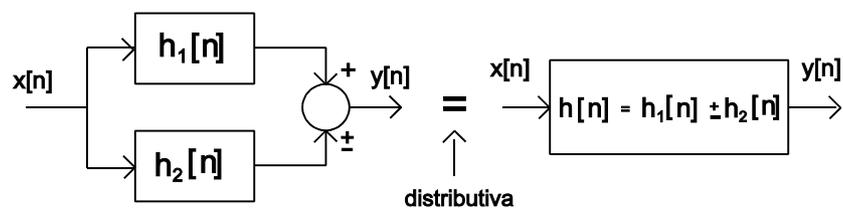


Fig. 5.4. Conexión en paralelo de sistemas LTI

6

SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL

6.1. Introducción

En el capítulo anterior se han presentado las estructuras realimentadas, sobre las que se basan la mayoría de sistemas de control. Habitualmente se identifica el término *realimentación* con el esquema de un sistema controlado. Un error por confusión de la parte con el todo, ya que la mayoría de los sistemas controlados lo son en lazo cerrado y, por tanto, implican algún tipo de realimentación

Ahora se van a introducir aspectos básicos de análisis de estructuras realimentadas cuando se intenta modificar el comportamiento de un sistema con el fin de que se adecue a ciertos patrones de comportamiento, principalmente especificados en el dominio temporal.

Ello es de interés en aplicaciones muy diversas. Los sistemas a controlar en aplicaciones reales pueden estar basados en múltiples tecnologías, como la eléctrica, la neumática, la hidráulica o la mecánica, por citar algunos ejemplos. No es objetivo de este texto adentrarse en las diferentes tecnologías de procesos industriales, sino una introducción al diseño de los reguladores digitales. Es decir, independientemente del tipo de proceso (del que se partirá de su modelo, deducido o identificado), el objetivo es el análisis y diseño de bloques de procesamiento digital que, intercalados en algún punto de la cadena de control, permitan conseguir que la dinámica del proceso a controlar (en ocasiones denominado *planta* por antigua tradición de la industria química) sea la deseada. Por ejemplo, los procesadores encargados del control digital de una herramienta de corte por tecnología láser deberán buscar un compromiso en la dinámica del apuntador del haz láser: si ésta es lenta, por ejemplo de primer orden con una constante de tiempo grande, la productividad será baja. Y si es más rápida, pero de segundo orden con oscilaciones puede que deba rechazarse demasiado material por corte incorrecto mientras las oscilaciones no se hayan estabilizado.

El catálogo de problemas donde se aplica la Teoría de Control es muy amplio, y por ello existen multitud de enfoques y estrategias para abordar las soluciones. Así, no será lo mismo un problema de regulación de un sistema determinista (con modelo conocido) que el de uno aleatorio, ni el control de un sistema lineal que el de otro no lineal, o la regulación de uno con una sola entrada y una sola salida (sistema SISO, *single input - single output*), que la de un sistema con múltiples entradas y salidas (sistema MIMO). Incluso la forma de representar los sistemas será distinta según su complejidad y los objetivos de diseño. En unos casos, bastará su función de transferencia; en otros se tendrá que recurrir a su modelado interno mediante variables de estado. Este segundo tipo de modelación es base para el análisis de sistemas MIMO y para el diseño de la mayoría de controladores robustos (caracterizados por unas garantías de estabilidad frente a incertidumbres en el comportamiento del sistema) y no lineales.

También podemos encontrarnos con sistemas invariantes en el tiempo o variantes; en este segundo caso, una alternativa son las estrategias de control adaptativo o predictivo. O bien, frente a especificaciones cualitativas, pueden abordarse soluciones de control óptimo o de control por lógica borrosa (*fuzzy logic*).

Este capítulo se centra en las bases del Control Digital aplicadas sobre sistemas lineales SISO y partiendo de su función de transferencia. En el diseño de controladores digitales se hace una doble aproximación: por un lado, partiendo de unas especificaciones suministradas directamente en el dominio digital y buscando el controlador que obligue a la planta a cumplirlas, y, por otro, suponiendo que ya se tiene un regulador analógico de funcionamiento satisfactorio pero que, por motivos de incorporación de nuevas prestaciones, fiabilidad, estrategia o imagen comercial, se desea implementar de forma digital mediante un microprocesador.

De entre los diferentes caminos para lograr ambos objetivos nos centraremos en dos: el diseño sin sobreimpulso (*dead-beat*) para el diseño directo del controlador digital y el rediseño digital de soluciones analógicas por técnicas de primera diferencia de retorno (*first difference backward*, FDB) y por transformación bilineal. Si bien no se profundizará en las técnicas de diseño indirecto (también denominadas de diseño *vía análisis*), en la parte de análisis se proporcionará una perspectiva sobre ellos. Y para el caso más usual en la industria de la regulación de plantas con modelo desconocido (total o parcialmente), se introducirán los reguladores PID.

Algunos conceptos que se tratan en este capítulo serán profundizados posteriormente, especialmente en el capítulo 10, destinado al diseño de filtros digitales. Ello es así por la coincidencia de algunas técnicas de diseño de filtros y de controladores. Tal es el caso de la técnica de identificación por mínimos cuadrados, que será desarrollada en el capítulo 10, o de las técnicas de discretización de controladores y filtros analógicos.

La repetición de ciertos conceptos entre el presente capítulo y el capítulo 10 se ha hecho con la intención de facilitar la lectura autónoma de cada uno de ellos. Mientras que algunos lectores estarán interesados en ambos enfoques de filtrado y de control, otros pueden estarlo sólo en la parte de diseño de los controladores y reguladores digitales, o bien sólo en la de los filtros digitales. El primer caso (controladores) suele darse cuando el objetivo es el control de procesos o dispositivos, mientras que el segundo es habitual cuando se persigue el filtrado digital de señales para aplicaciones como las de procesamiento de voz, de imágenes o en comunicaciones.

A lo largo de esta introducción se han utilizado arbitrariamente los términos *controlador* y *regulador*. Si bien las bases de análisis y diseño son las mismas, funcionalmente persiguen objetivos algo distintos. En el caso del regulador, se supone que la consigna (orden o entrada al sistema) es constante, es decir, se trata de una planta de la que se quiere mantener inalterada su dinámica. Por ejemplo, sería el caso del motor que accionara la rotación de un CD, a velocidad constante. Así, la función de un regulador sería compensar perturbaciones internas o externas que pudieran alterar el funcionamiento nominal. Si, por el contrario, la consigna es variante y el objetivo es que el sistema la siga adecuadamente, entonces se habla de un controlador. En sistemas lineales, que son los que se van a estudiar, el valor de la entrada (sea constante o variante) no afecta a la dinámica propia del sistema, por el principio de linealidad. Por ello, cuando se trata de reguladores es usual utilizar la expresión *control de sistemas de consigna cero*. Ello es comprensible si se piensa en modelos incrementales: por "cero" se entiende el funcionamiento nominal, no perturbado, del sistema.

6.2. Ventajas de los sistemas realimentados

Según lo visto en el apartado 5.3.13, la función de transferencia de un sistema realimentado como el de la figura 6.1 es:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (6.1)$$

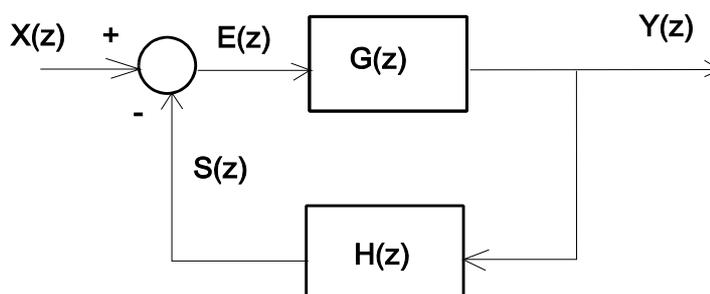


Fig. 6.1. Sistema realimentado básico

Supóngase que $G(z)$ es el modelo en tiempo discreto de una planta analógica que se desea controlar mediante un sistema $H(z)$. De la expresión anterior (6.1) puede verse que, si $H(z) \gg G(z)$ (por ejemplo, que su ganancia sea muy superior para todos los valores de z), la expresión anterior se simplifica en:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \approx \frac{1}{H(z)} \quad \text{si } H(z) \gg G(z), H(z) \gg 1 \quad (6.2)$$

De modo que la dinámica del sistema resultante sólo depende de $H(z)$ insensibilizándose así de la dinámica de la planta $G(z)$. Ello es de interés cuando ésta presenta dinámicas no deseadas (como alinealidades), pero cuyo uso es inevitable para la aplicación. Piénsese, por ejemplo, en un motor que debe actuar un determinado sistema mecánico o un amplificador de potencia necesario para excitar una antena: ambos son inevitables pero su dinámica seguramente será no lineal (zonas muertas, saturaciones, compresiones de la curva de amplificación...).

Incluso, aunque no se cumpla la condición de $H(z) \gg G(z)$, el propio uso de una estructura realimentada ya *insensibiliza al sistema frente a variaciones paramétricas* en $G(z)$. En efecto, definiendo la sensibilidad del sistema global $T(z)$ respecto a la planta $G(z)$ como:

$$\text{sensibilidad} = \frac{\text{porcentaje de variación de } T(z)}{\text{porcentaje de variación de } G(z)} \quad (6.3)$$

Se tiene:

$$S_G^T = \frac{\delta T / T}{\delta G / G} \cdot \frac{\delta T}{\delta G} \cdot \frac{G}{T} \cdot \frac{(1 + GH) + GH}{(1 + GH)^2} \cdot \frac{G}{G / (1 + GH)} \cdot \frac{1}{1 + GH} \quad (6.4)$$

Mientras que, si sólo hubiera la planta sin realimentar, $T(z) = G(z)$:

$$S_G^T = \frac{\delta T / T}{\delta G / G} \cdot \frac{\delta T}{\delta G} \cdot \frac{G}{T} = 1 \quad (6.5)$$

claramente superior a la sensibilidad anterior.

Otra posibilidad que ofrecen las estructuras realimentadas es la *modificación de la velocidad de respuesta*. Supongamos que:

$$G(z) = \frac{10z}{z - 0,5} \quad (6.6)$$

y que $H(z) = K$. La respuesta impulsional de la planta aislada sería:

$$g(nT) = 10 (0,5)^n u(nT) \quad (6.7)$$

Mientras que, al realimentar, la respuesta global es:

$$T(z) = \frac{1}{10K + 1} \cdot \frac{10z}{z - (0,5 / (10K + 1))} \quad (6.8)$$

siendo ahora la respuesta impulsional:

$$\frac{10}{10K + 1} \left(\frac{0,5}{10K + 1} \right)^{nT} u(nT) \quad (6.9)$$

con lo que la fuerza de la función potencial (velocidad) puede regularse con el valor de K (que según la ecuación 6.8 deberá estar acotado a $-0,15 < K < -0,05$ por motivos de estabilidad; sino, el polo estaría fuera de la circunferencia de radio unidad).

Si en este ejemplo se hubiera partido de una planta inestable, como sería el caso de tener un polo fuera de la circunferencia de radio unidad:

$$G(z) = \frac{10z}{z^5} \quad (6.10)$$

Podría comprobarse otra de las importantes propiedades de la realimentación: *la estabilización del sistema*. En este caso, la función de transferencia sería:

$$T(z) = \frac{1}{10K+1} \frac{10z}{z^5/(10K+1)} \quad (6.11)$$

de modo que, con valores de K comprendidos entre 0,4 y -0,6, el sistema en lazo cerrado sería estable.

Precisamente por esta capacidad de los sistemas en lazo cerrado de modificar la dinámica de la planta hay que elegir la frecuencia de muestreo en función de la respuesta en lazo cerrado. Y dado que la selección de la frecuencia de muestreo es un paso previo a los diseños, habrá que hacerlo en función de las especificaciones esperadas del sistema en lazo cerrado.

También los sistemas realimentados son más *robustos frente a perturbaciones o ruidos* externos.

Para verlo, supóngase que la perturbación se añade en el interior de la planta $G(z)$, que se descompone en un modelo con una parte $G_1(z)$, libre de ella, y otra $G_2(z)$ afectada por la perturbación $N(z)$:

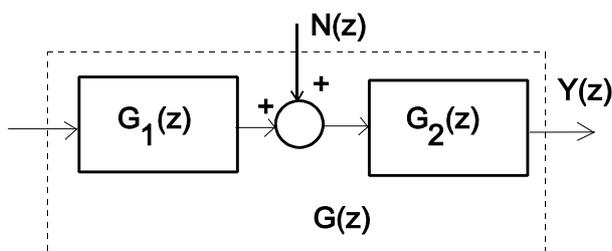


Fig. 6.2. Perturbación externa

En el sistema sin realimentar, la perturbación $N(z)$ se manifestaría a la salida como:

$$Y(z) = G_2(z) N(z) \quad (6.12)$$

mientras que en lazo cerrado:

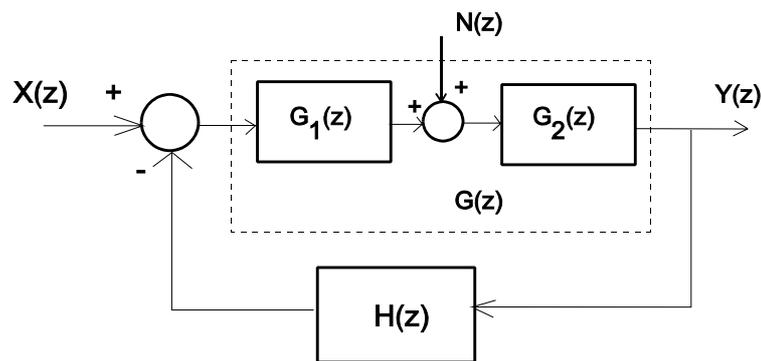


Fig. 6.3. Sistema realimentado con perturbación en la planta

$$Y(z) = \frac{G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)H(z)} N(z) \quad (6.13)$$

con lo que el efecto de $N(z)$ se notará tanto menos en la salida cuanto mayor sea el valor de $H(z)$ - o el de $G_1(z)$.

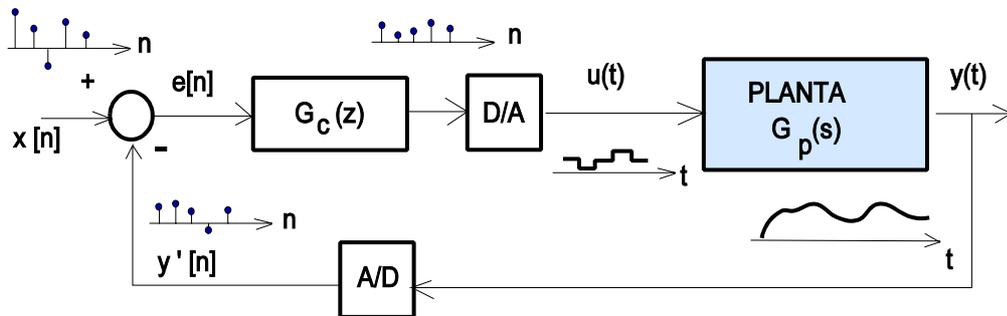
6.3. El lazo de control. Modelación de plantas analógicas

Cuando los sistemas a controlar son de tiempo discreto no hay grandes dificultades para su modelado, ya que tanto la propia planta como el controlador se pueden describir en un dominio homogéneo utilizando para ambos la transformada Z. Así, en el caso de un sistema realimentado de control totalmente digital (regulador más planta digitales), puede recurrirse directamente a lo presentado en el apartado 5.3.13 para obtener un modelo analítico sobre el que bordar los diseños.

Sin embargo, esta situación tiene un interés relativo en el caso del control digital ya que los sistemas no suelen estar constituidos sólo por subsistemas de tiempo discreto. Si bien los reguladores son discretos, las plantas suelen ser de tiempo continuo, con lo que nos encontramos ante un escenario híbrido. Piénsese, por ejemplo, en el caso del control digital de un motor de corriente continua que acciona un eje de una máquina: si bien el algoritmo soportado por el microprocesador es digital, la máquina (analógica) funciona en tiempo continuo.

Obviamente, la presencia de subsistemas analógicos conectados a otros digitales conlleva el uso de convertidores A/D y D/A. En la figura 6.4 el bloque $G_c(z)$ representa el algoritmo soportado por un microcomputador, y $G_p(s)$ la función de transferencia en tiempo continuo de la planta. Como ya se ha avanzado, con esta palabra se describe el sistema analógico a controlar (motor, columna de destilación, posicionador de un láser, amplificador electrónico, alerones de un avión, etc.). Por simplicidad, la $G_p(s)$ de la figura incorpora los posibles accionadores del sistema (como sería el caso del amplificador de potencia si se tratara de un motor), así como la propia dinámica de los

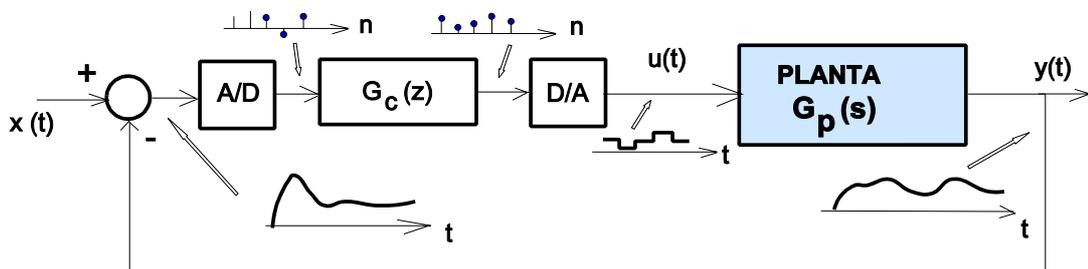
captadores de señal que permiten disponer de la salida $y(t)$ –tacómetros, acelerómetros, barómetros, termostatos, etc. Nótese el efecto de retención de orden cero (ZOH) del convertor D/A.



$x[n]$: consigna digital al sistema (puede proceder de un teclado, un sensor digital,..)

Fig. 6.4. Control digital

Si, en lugar de trabajarse con una consigna digital, ésta fuera analógica, se desplazaría la posición del convertor A/D y el sistema anterior sería:



$x(t)$: consigna analógica al sistema

Fig. 6.5. Control digital con consigna analógica

A diferencia de los sistemas en lazo abierto, en que el único efecto negativo del convertor D/A (u operador *hold* de orden cero, ZOH) era la distorsión de apertura, en los sistemas de lazo cerrado el ZOH modifica la dinámica del sistema, e incluso puede llegar a inestabilizarlo.

Recordando que la función de transferencia del ZOH, vista en el apartado 4.4.3, era $H(s) = (1 - e^{-Ts}) / s$, centrémonos ahora en la figura 6.6, que equivale al diagrama de bloques de la figura anterior. El interruptor representa la adquisición de muestras con un período de muestreo de T segundos.

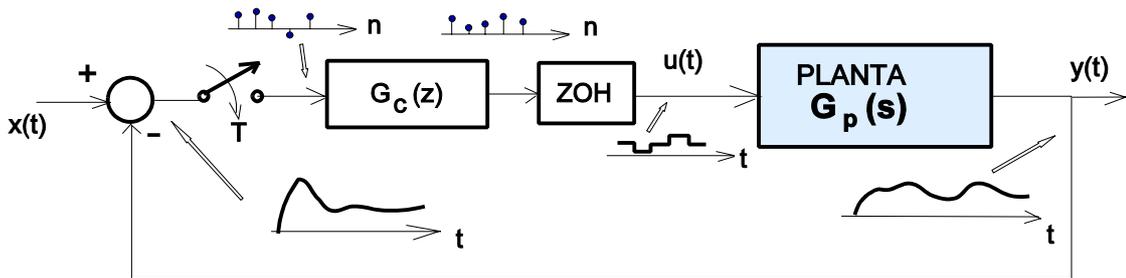


Fig. 6.6. Modificación de la figura anterior

Para poder resumir en un solo bloque a los tres que aparecen en la cadena directa (conexión directa de la entrada a la salida, formada por $G_c(z)$, ZOH y $G_p(s)$), hay que unificar el dominio transformado. Como $G_c(z)$ se obtiene de una secuencia de muestras definidas sólo en los instantes de muestreo, una solución coherente es trabajar con muestras de $u(t)$ y de $y(t)$ calculadas en los mismos instantes de muestreo. Para ello, se podría pensar en antitransformar $G_p(s)$ y, a partir de la respuesta impulsional del sistema continuo $g_p(t)$ particularizada en $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), hallar la transformada Z.

Pero también hay que considerar el ZOH. El numerador de su función de transferencia ($1 - e^{-Ts}$) puede describirse en el dominio transformado Z como $1 - z^{-1}$ (propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo). Y el denominador del ZOH (término s) puede interpretarse como un polo añadido a $G_p(s)$, ya que están conectados en cascada. Así, el sistema anterior puede representarse del modo siguiente:

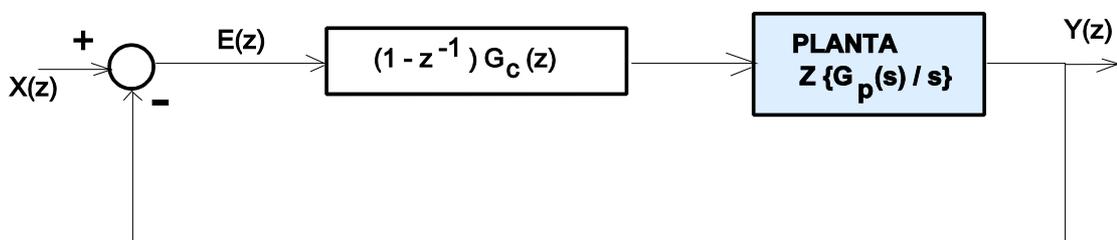


Fig. 6.7. Efectos de la modelación del convertor D/A

La transformada Z de $G_p(s)/s$ se puede obtener muestreando la integral de $g_p(t)$ (por la propiedad de dividir por s la transformada de Laplace) y calculando la transformada Z del resultado. Como este proceso es engorroso, hay tablas para pasar de $G_p(s)/s$ a $G_p(z)$.¹ Además, en el capítulo 10, destinado al diseño de filtros digitales, se verán otras aproximaciones (FDB, bilineal, ...) entre el sistema continuo, descrito por su transformada de Laplace, y su transformada Z.

Un último comentario sobre la modelación afecta a la forma en que se programan los algoritmos de control. Supóngase el caso de un microprocesador que, además de controlar la planta, debe ejecutar otras funciones adicionales, como estadísticas de resultados, gestión de comunicaciones o supervisión de alarmas, las cuales consumen

¹ Un buen compendio de estas tablas se encuentra en la revista *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-9, núm. 12, diciembre de 1979, págs. 857-858.

un cierto tiempo. Si el microprocesador se centra, en primer lugar, en adquirir la muestra de entrada del conversor A/D y calcular la salida hacia el conversor D/A –salida del algoritmo del controlador $G_c(z)$ –, y después efectúa las tareas adicionales, se tiene el cronograma de la figura 6.8a. Si, por el contrario, no saca la salida al conversor D/A hasta después de haber efectuado todas las tareas adicionales, el cronograma será el de la figura 6.8b.

Nótese que, en ambos casos, el período de muestreo T es el mismo, pero en el segundo hay un retardo T desde que se adquiere la entrada (A/D) hasta que se extrae la salida (D/A). Este retardo se modela como un término z^{-1} , de forma que, si se sigue la estrategia de la figura 6.8b, la planta deberá modelarse como:

$$G(z) = z^{-1} Z\left(\frac{G_p(s)}{s}\right) \quad (6.14)$$

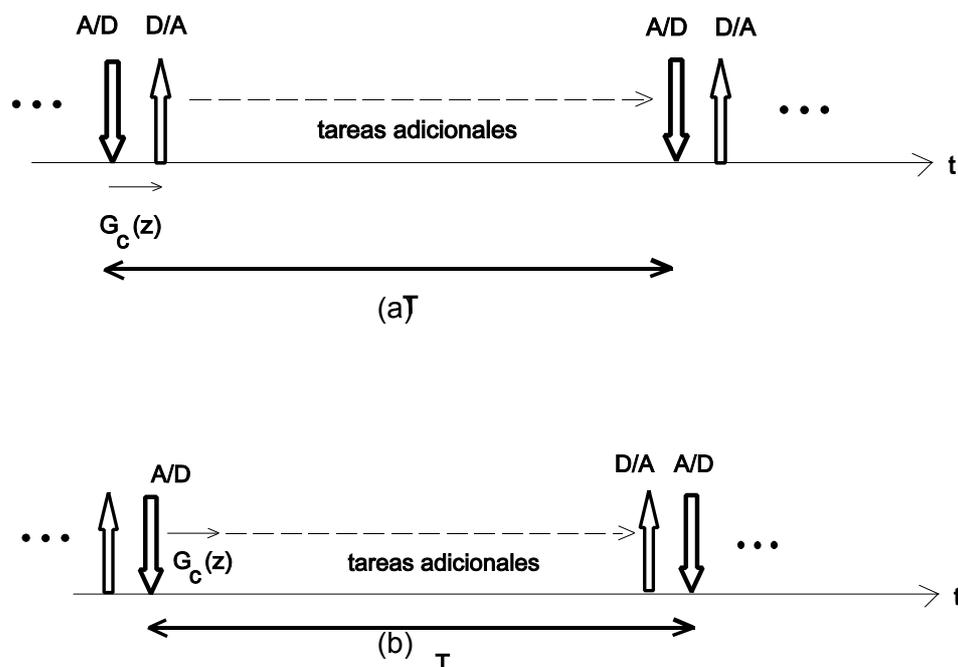


Fig. 6.8. Retardo en la programación del controlador $G_c(z)$

6.3.1. Ejemplo: control digital de un motor de corriente continua (análisis básico)

Supóngase que se tiene un motor de corriente continua (c.c.), del que no se conocen las características dinámicas, el cual acciona a través de unos engranajes reductores de velocidad (incremento del par motor al precio de perder velocidad, como en los cambios de marcha de las bicicletas) una plataforma rotatoria que orienta una antena.

Junto con el motor, se dispone de un tacómetro para medir la velocidad. La constante del tacómetro es de 7 mV/rpm (rpm: revoluciones por minuto).

Es de capital importancia que la orientación de la antena rotatoria sea lo más precisa posible, y se ofrecen diversos algoritmos de control digital. Se trata de estudiar, aplicando propiedades de la transformada Z, la viabilidad de los diversos algoritmos que se ofrecen.

Para identificar la dinámica del motor, junto con su carga mecánica, se efectúa el experimento siguiente: en primer lugar, conectamos una fuente de alimentación capaz de dar la suficiente potencia al motor. Como el sistema mecánico es lento respecto al tiempo de estabilización de la tensión de la fuente, podemos aproximar que hemos aplicado un escalón ideal de tensión al motor (la fuente es de 10 voltios).

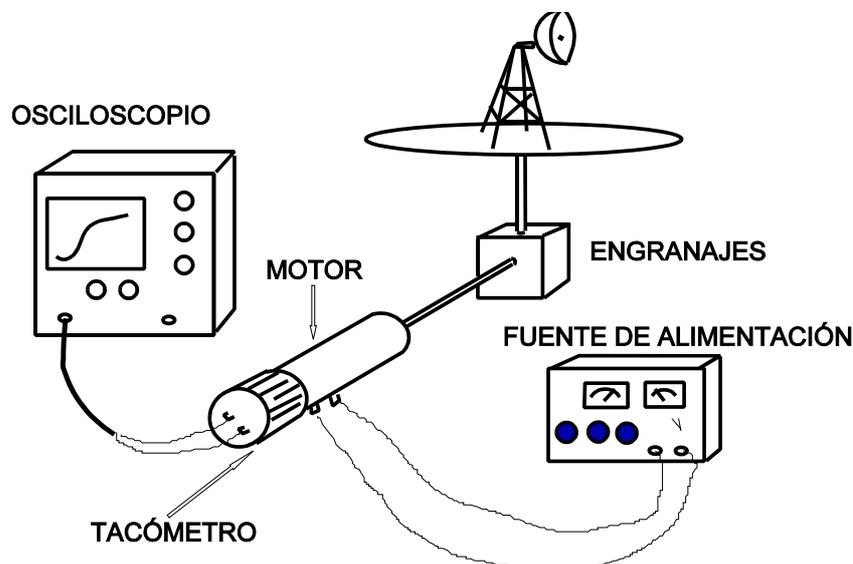


Fig. 6.9. Montaje de laboratorio para la caracterización dinámica de un motor de corriente continua

Conectando un tacómetro a un osciloscopio digital se ha obtenido la gráfica siguiente:

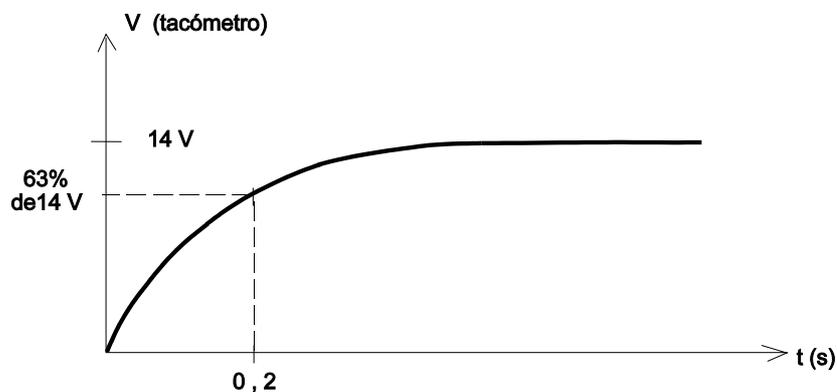


Fig. 6.10. Respuesta de primer orden del motor

correspondiente a una sistema de primer orden con una constante de tiempo $\tau = 0,2$ s. Así, la función de transferencia en tiempo continuo del motor con su carga mecánica es:

$$H_{mot}(s) = \frac{K}{s\%p} \cdot \frac{K^t}{\tau s\%1} = \frac{K^t}{0,2s\%1}$$

siendo K' la amplificación en continua (en régimen permanente) del motor. Por el teorema del valor final de la transformada de Laplace, se tiene que la salida del motor en régimen permanente es:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10}{s} H(s) = 10 K^t$$

Considerando la constante del tacómetro ($K_T = 7$ mV / rpm), se deduce que 14 V corresponden a 2.000 rpm, obtenidas con la excitación de 10 V. Así, en unidades mks:

$$K^t = \frac{2.000 \text{ rpm}}{10 \text{ V}} \cdot \frac{2.000}{60 \cdot 10} \left(\frac{\text{rps}}{\text{V}} \right) \cdot [1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad}] = 20,94 \frac{\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{V}}$$

$$H_{mot}(s) = \frac{20,94}{0,2s\%1} \approx \frac{104,72}{s\%5}$$

El sistema en lazo cerrado que controla la velocidad de giro ($n(t)$) del motor, siguiendo una consigna digital $r[n]$ introducida desde el teclado de un microcomputador, es:

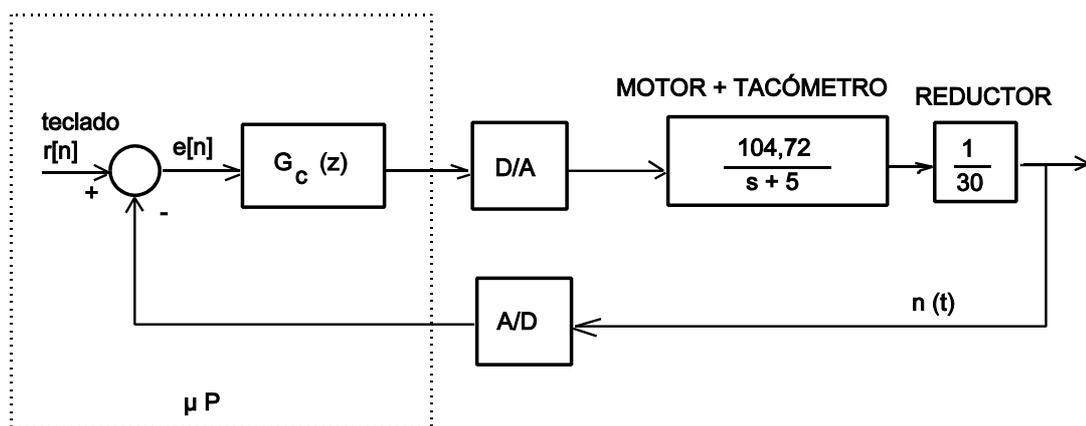


Fig. 6.11. Modelo del sistema en lazo cerrado

El bloque 1/30 corresponde a la reducción mecánica de 1:30. Como la potencia mecánica es $P_{mec} = \text{par} \cdot \text{velocidad}$, el reductor actúa de forma similar a la de un transformador ideal en sistemas eléctricos: conserva la potencia modificando sus dos componentes, una en sentido inverso de la otra. Como en este caso lo que se reduce es la velocidad, se aumenta el par motor.

MODELACIÓN EN EL DOMINIO DE LA TRANSFORMADA Z

Considerando el efecto de ZOH del convertor D/A, y despreciando los efectos debidos a la cuantificación en el convertor A/D, un primer modelo en el que se mezclan bloques en tiempo continuo y en tiempo discreto es el de la figura siguiente:

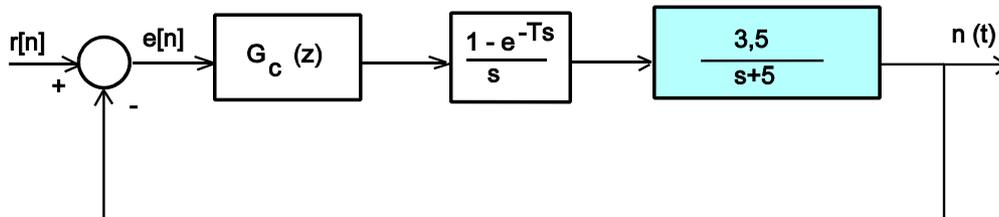


Fig. 6.12. Modelo simplificado

Arreglando la función de transferencia del ZOH como se ha comentado en la figura 6.7, se tiene:

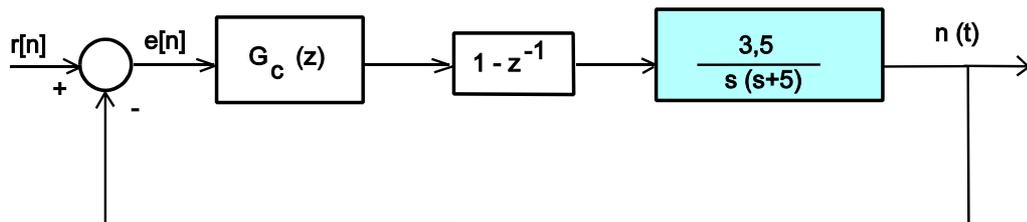


Fig. 6.13. Modelación del ZOH

El bloque en el dominio S se convierte al dominio Z para trabajar todo el lazo con una herramienta homogénea. Este paso podría hacerse de forma rápida aprovechando alguna de las relaciones entre los planos S y Z que se verán posteriormente. Por el momento, se hace antitransformado $H(s)$ para obtener su respuesta impulsional $h(t)$, que después se particularizará en los instantes de muestreo $t = nT$, en los que también está definida la secuencia discreta $r[n]$.

$$H(s) = \frac{3,5}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = 0,7$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -5} (s+5)H(s) = -0,7$$

$$h(t) = 0,7(1 - e^{-5t})u(t)$$

Haciendo ahora $t = nT$, siendo T el período de muestreo:

$$h(nT) = 0,7(1 + e^{-5nT}) u(nT) \text{ y}$$

$$Y H(z) = \frac{0,7}{1 + z^{-1}} + \frac{0,7}{1 + e^{-5T} z^{-1}} = \frac{(1 + e^{-5T}) 0,7 z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + e^{-5T} z^{-1})}$$

con lo que el modelo del sistema en lazo cerrado es:

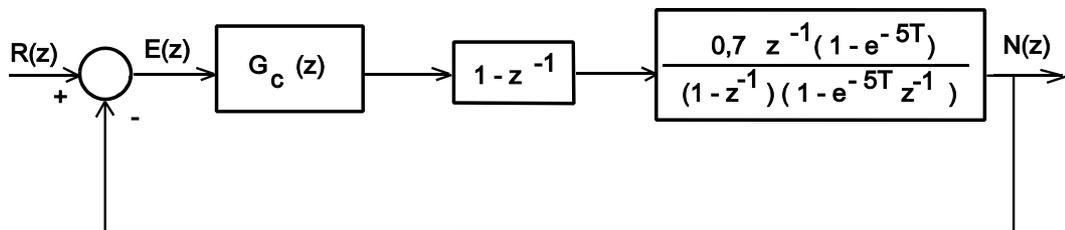


Fig. 6.14. Modelo en el plano Z

y, agrupando bloques que están en cascada en la cadena directa:

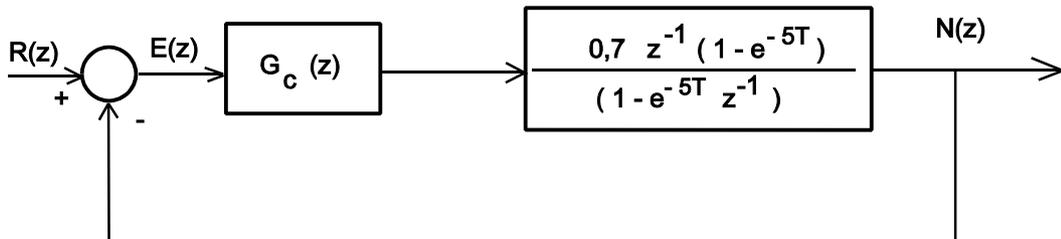


Fig. 6.15. Simplificación de la figura anterior

Operando con los bloques de este sistema realimentado, se tiene que la función de transferencia entre la salida del sistema $N(z)$ –transformada de la velocidad– y la entrada $R(z)$ es:

$$\frac{N(z)}{R(z)} = \frac{0,7 z^{-1} (1 + e^{-5T}) G_c(z)}{(1 + e^{-5T} z^{-1}) G_c(z) + 0,7 z^{-1} (1 + e^{-5T})}$$

y, seleccionando un período de muestreo $T = 0,01$ s, mucho menor que la constante de tiempo del motor, se tiene: